Elemente de teoria probabilitatilor

- CONCEPTE DE BAZA
- VARIABILE ALEATOARE DISCRETE
- DISTRIBUTII DISCRETE
- VARIABILE ALEATOARE CONTINUE
- DISTRIBUTII CONTINUE
- ALTE VARIABILE ALEATOARE

Spatiul esantioanelor, puncte esantion, evenimente

- Spatiul esantioanelor e reprezentat de spatiul tuturor punctelor esantion:

$$\omega \in \Omega$$

  – Exemplul 1 Aruncarea banului: $\Omega = \{C, P\}$

  – Exemplul 2 Aruncarea zarului: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

  – Exemplu 3 Numarul de clienti intr-o coada: $\Omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$

  – Exemplul 4 Timpul de ocupare a liniei(call holding time):

$$\Omega = \{x \in R \mid x > 0\}$$

Spatiul esantioanelor, puncte esantion, evenimente

Evenimentele $A, B, C, \ldots \subset \Omega$ reprezinta **subseturi masurabile** de esantioane din Ω

– Exemplul 1: “Aparitia numerelor pare la aruncarea zarului”:

$$A = \{2, 4, 6\}$$

– Exemplul 2: “Lipsa clientilor in coada de asteptare”:

$$A = \{0\}$$

– Exemplul 3: “Timpul de ocupare a liniei telefonice mai mare decit 3 min”

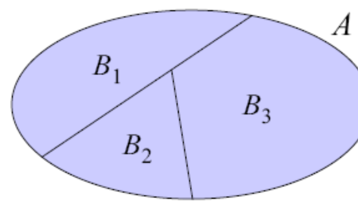
$$A = \{x \in R \mid x > 3\}$$

Spatiul esantioanelor, puncte esantion, evenimente

- Fie Ψ spatiul tuturor evenimentelor $A \in \Psi$
  - Evenimentul sigur: Este reprezentat de spatiul esantioanelor: $\Omega \in \Psi$
  - Evenimentul imposibil: Este reprezentat de setul care nu contine nici un eveniment: $\phi \in \Psi$

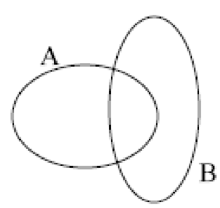
Combinatii de evenimente

- Reuniunea de evenimente: " *A* sau *B*": $A \cup B = \{\omega \in \Omega | \omega \in A \; sau \; \omega \in B\}$
- Intersectia evenimentelor: " *A* si *B*": $A \cap B = \{\omega \in \Omega | \omega \in A \; si \; \omega \in B\}$
- Evenimentul complementar lui *A*: $A^C = \{\omega \in \Omega | \omega \notin A\}$
- Evenimentele *A* si *B* sunt disjuncte daca: $A \cap B = \Phi$
- Un set de evenimente $\{B_1, B_2, \ldots\}$ reprezinta **o partitie** pentru *A* daca
  - (i) $B_i \cap B_j = \phi, \; pentru \; toti \;\; i \neq j$
  - (ii) $\cup_i B_i = A$



Probabilitati

- Probabilitatea evenimentului *A* este notata prin $P(A), \quad P(A) \in [0,1]$
- $P : \Psi \rightarrow [0,1]$
- *Proprietati*
  - *(i)* $0 \geq P(A) \leq 1$
  - *(ii)* $P(\phi) = 0$
  - *(iii)* $P(\Omega) = 1$
  - *(iv)* $P(A^C) = 1 - P(A)$
  - *(v)* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - *(vi)* $A \cap B = \phi \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
  - *(vii)* $\{B_i\} \; este \; o \; partitie \; a \; lui \; A \Rightarrow P(A) = \sum_i P(B_i)$
  - *(viii)* $A \subset B \Rightarrow P(A) < P(B)$



Probabilitati conditionate

- Presupunem ca $P(B) > 0$
- Definitie: probabilitatea conditionata a evenimentului A, in ipoteza ca evenimentul B se produce este:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Rezulta:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

Teorema probabilitatii totale

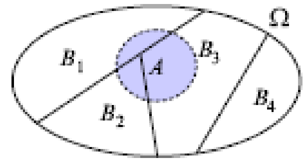
- Fie $\{B_i\}$ o partitie pe spatiul esantioanelor Ω
- Rezulta ca $\{A \cap B_i\}$ reprezinta o partitie pentru evenimentul *A.* Astfel:

$$P(A) = \sum_i P(A \cap B_i)$$

- Sa presupunem mai departe ca $P(B_i) > 0$ oricare ar fi *i.* Rezulta conf slide ant:

$$P(A) = \sum_i P(B_i)P(A|B_i)$$

- Aceasta reprezinta **teorema probabilitaii totale**



Teorema lui Bayes

- Fie $\{B_i\}$ o partitie pe spatiul esantioanelor Ω
- Sa presupunem ca *P*(*A*) > 0 si *P*(B_i) > 0 pentru toate valorile *i*

$$P(B_i|A)=\frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

- Conform teoremei probabilitaii totale avem:

$$P(B_i|A)==\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_j P(B_j)P(A|B_j)}$$

- Aceasta reprezinta ***Teorema lui Bayes***
  - Probabilitatile **P(B_i)** se numesc **probabilitai apriori** ale evenimentelor B_i
  - Probabilitatile **P(B_i|A)** se numesc **probabilitati aposteriori** ale evenimentului B_i

Independenta statistica a evenimentelor

- Definitie: Evenimentele *A* si *B* sunt independente daca:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

- Rezulta:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A)$$

- In mod corespunzator avem:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$$

Variabile aleatoare

- Definitie: Variabila aleatoare reala *X* este o functie reala si masurabila definita pe Ω,

$$X : \Omega \to R$$

  - Care asociaza fiecarui punct esantion ω, valoarea reala *X*(ω)

- Masurabilitatea inseamna ca toate seturile de tipul

$$\{X \le x\} := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\} \subset \Omega$$

apartin setului de evenimente Ψ: $\{X \le x\} \in \Psi$

- Probabilitatea unui astfel de eveniment este notata cu: $P\{X \le x\}$

Exemple

- O moneda e aruncata de trei ori
- Spatiul esantioanelor este in acest caz

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mid \omega_i \in \{C, P\}, i = 1,2,3\}$$

- Fie *X* variabila aleatoare care ne da numarul total de aparitii a "pajurei" in acest caz:

ω	CCC	CCP	CPC	PCC	CPP	PCP	PPC	PPP
X(ω)	0	1	1	1	2	2	2	3

Indicator de evenimente

- Fie $A \in \Psi$ un eveniment arbitrar
- Definitie: Indicatorul evenimentului *A* este o variabila aleatoare definita dupa cum urmeaza:

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

- Rezulta:

$$P(1_A = 1) = P(A)$$

$$P(1_A = 0) = P(A^C) = 1 - P(A)$$

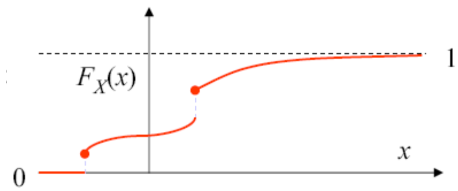
Functia de distributie cumulativa - Functia de repartitie

- Functia de repartitie a variabilei aleatoare *X* este o functie $F_X : R \to [0,1]$

  definita astfel:

$$F_X = P\{X \le x\}$$

- Ea determina distributia variabilei aleatoare, adica probabilitatea $P\{X \in B\}$ unde $B \in R$ si $\{X \in B\} \in \Psi$
- Proprietati:
- i) F_X este nedescrescatoare
- ii) F_X este continua la dreapta
- iii) $F_X(-\infty) = 0$
- Iv) $F_X(\infty) = 1$



Independenta statistica a variabilelor aleatoare

- Variabilele aleatoare *X* si *Y* sunt independente daca pentru toti *x* si *y* au loc urmatoarele relatii:

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$$

- Variabilele aleatoare $X_1, X_2, \ldots X_n$ sunt total independente pentru toate

valorile i si x_i daca are loc relatia:

$$P(X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n) = P(X_1 \le x_1) \ldots P(X_n \le x_n)$$

Valorile maxima si minima ale variabilelor aleatoare independente

- Fie variabilele aleatoare $X_1, X_2, \ldots X_n$ total independente
- Sa notam: $X^{\max} := \max\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$. Avem:

$$P\{X^{\max} \le x\} = P\{X_1 \le x, \ldots, X_n \le x\} = P\{X_1 \le x\} \cdots P\{X_n \le x\}$$

- Sa notam: $X^{\min} := \min\{X_1, \ldots X_n\}$. Avem:

$$P\{X^{\min} > x\} = P\{X_1 > x, \ldots, X_n > x\} = P\{X_1 > x\} \cdots P\{X_n > x\}$$

Variabile aleatoare discrete

- Definitie: Setul $A \subset R$ este numit discret daca este:
  - Finit: $A = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ sau
  - Infinit numarabil $A = \{x_1, x_2, \dots\}$
- Definitie: **Variabila aleatoare *X* este discreta** daca exista un set discret $S_X \subset R$ astfel incat

$$P(X \in S_X) = 1$$

- Rezulta: $P(X = x) \geq 0 \; pentru \; toti \; x \in S_X$
- Si $P(X = x) = 0 \; pentru \; toti \; x \notin S_X$
- S_X este numit **setul de valori**

Probabilitati punctuale

- Fie X o variabila aleatoare discreta
- Distributia lui X este determinata de probabilitatile punctuale p_i .

$$p_i = P\{X = x_i\}, \quad x_i \in S_X$$

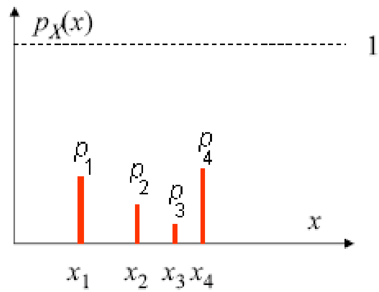
- Definitie: functia densitate de probabilitate a lui *X* este o functie $p_X : R \to [0,1]$ definita astfel:

$$p_X(x) := P\{X = x\} = \begin{cases} p_i, & x = x_i \in S_X \\ 0, & x \notin S_X \end{cases}$$

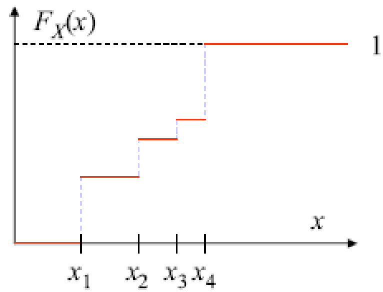
- Functia de distributie este in acest caz o functie in trepte:

$$F_X = P\{X \leq x\} = \sum_{i: x_i \leq x} p_i$$

Exemple



Functia densitate de probabilitate



Functia de repartitie

$$S_X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

Independenta variabilelor aleatoare discrete

- Variabilele aleatoare discrete *X* si *Y* sunt independente daca si numai daca pentru

toti $x_i \in S_X$ si toti $y_j \in S_Y$ avem:

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}$$

Media statistica-Speranta matematica- Momentul de ordinul intai

- Definitie: Speranta (valoarea medie) lui *X* se defineste astfel;

$$\mu_X := E[X] := \sum_{x \in S_X} P\{X = x\}x = \sum_{x \in S_X} p_X(x)x = \sum_i p_i x_i$$

  - Nota 1: media exista numai daca: $\sum_i p_i |x_i| < \infty$
  - Nota 2: daca $\sum_i p_i |x_i| = \infty$ putem admite ca $E[X] = \infty$

- *Proprietati:*
  - *(i)* $c \in R, \Rightarrow E[cX] = cE[X]$
  - *(ii)* $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
  - *(iii) X si Y sunt independente* $E[XY] = E[X]E[Y]$

Varianta matematica

- Definitie: Varianta lui *X* se defineste astfel;

$$\sigma_X^2 := D^2[X] := Var[X] := E[(X - E(X))^2]$$

- Se poate demonstra usor ca:

$$D^2[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

- *Proprietati:*
  - *(i)* $c \in R, \Rightarrow D^2[cX] = c^2 D^2[X]$
  - *(ii) X si Y sunt independente* $\Rightarrow D^2[X + Y] = D^2[X] + D^2[Y]$

Covarianta

- Definitie: Covarianta intre X si Y se defineste;

$$\sigma_{XY}^2 := Cov[X,Y] := E[(X - E(X)(Y - E(Y)]$$

- Se poate demonstra usor ca:

$$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

- *Proprietati:*
  - *(i)* $Cov[X,X] = Var[X]$
  - *(ii)* $Cov[X,Y] = Cov[Y,X]$
  - *(iii)* $Cov[X+Y,Z] = Cov[X,Z] + Cov[Y,Z]$
  - *(iv) X si Y sunt independente* $\Rightarrow Cov[X,Y] = 0$

Alti parametri ai distributiilor

- Definitie: Deviatia standard a lui X se defineste;

$$\sigma_X := D[X] := \sqrt{D^2[X]} = \sqrt{Var[X]}$$

- Coeficientul variatiei a lui X:

$$c[X] := C[X] := \frac{D[X]}{E[X]}$$

- Definitie*:* momentul de ordin k al lui X, $k = 1,2,\ldots,$ e definit de:

$$\mu_X^k[X] := E[X^k]$$

Valori medii ale variabilelor IID

- Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabile aleatoare independente si identic distribuite (IID)

  cu media μ si varianta σ^2

$$\sigma_X := D[X] := \sqrt{D^2[X]} = \sqrt{Var[X]}$$

- Se defineste media (media esantioanelor):

$$\overline{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Mai au loc urmatoarele relatii*:*
  - $E[\overline{X_n}] = \mu$
  - $D^2[\overline{X_n}] = \dfrac{\sigma^2}{n}$
  - $D\ [\overline{X_n}] = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Legea numerelor mari

- Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabile aleatoare independente si identic distribuite (IID)

  cu media μ si varianta σ^2

- Legea slaba a numerelor mari: pentru toti ε > 0 are loc relatia:

$$P\{\left|\overline{X_n} - \mu\right| > \varepsilon\} \to 0$$

- Legea tare a numerelor mari: cu probabilitate egala cu 1 are loc relatia:

$$\overline{X_n} \to \mu$$

Distributi discrete – Distributia Bernoulli

$$X \sim Bernoulli(p),\ p \in (0,1)$$

– Descrie un experiment aleator cu doua posibile realizari: succes (1) si insucces (0): aruncarea banului
– Succesul este caracterizat de probabilitatea *p* si insuccesul de probabilitatea 1-*p*

- Setul de valori: $S_X = \{0,1\}$
- Probabilitatile punctuale:

$$P(X=1)=p, \quad P(X=0)=1-p$$

- Media: $E[X]=(1-p)\cdot 0 + p\cdot 1 = p$
- Momentul de ordinul al-II-lea: $E[X^2]=(1-p)0^2 + p\cdot 1^2 = p$
- Varianta: $D^2[X]=E[X^2]-E[X]^2 = p-p^2 = p(1-p)$

Distributi discrete – Distributia Binomiala

$$X \sim Bin(n,p), n \in \{1,2,\ldots\}, \quad p \in (0,1)$$

– Descrie numarul succeselor intr-o serie independenta de experimente

aleatoare simple (de tip Bernoulli), $X = X_1 + X_2 + \cdots X_n$ cu $X_i \sim Bernoulli(p)$

– n = numarul total de experimente
– *p* = probabilitatea succesului intr-un experiment individual

- Setul de valori: $S_X = \{0,1,\ldots,n\}$
- Probabilitatile punctuale: $P(X=i)=C_n^i p^i (1-p)^{n-i}, \quad C_n^i = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$
- Media: $E[X]=E[X_1]+E[X_2]+\cdots E[X_n]=np$
- Varianta: $D^2[X]=D^2[X_1]+\cdots D^2[X_n]=np(1-p)$

Distributii discrete – Distributia Geometrica

$$X \sim Geom(p),\ p \in (0,1)$$

- Descrie numarul succeselor pana la primul insucces intr-o serie independenta de experimente aleatoare simple (de tip Bernoulli)
- *p* = probabilitatea succesului intr-un experiment individual

- Setul de valori: $S_X = \{0,1,\ldots\}$
- Probabilitatile punctuale: $P(X = i) = p^i(1-p)$
- Media: $E[X] = \sum_i ip^i(1-p) = p/(1-p)$
- Momentul de ordinul al – II – lea: $E[X^2] = \sum_i i^2 p^i (1-p) = \dfrac{p(p+1)}{(1-p)^2}$
- Varianta: $D^2[X] = E[X^2] - E[X]^2 = p/(1-p)^2$

Proprietatea memoryless a Distributiei Geometrice

- Distributia geometrica are proprietatea de a fi fara memorie: pentru toti $i, j \in \{0,1,\ldots\}$ are loc relatia:

$$P\{X \geq i + j \mid X \geq i\} = P\{X \geq j\}$$

- Pentru demonstratie trebuie tinut cont de relatia:

$$P(X \geq i) = p^i$$

Minimul varabilelor aleatoare cu distributie geometrica

- Fie $X_1 \sim Geom(p_1)$ si $X_2 \sim Geom(p_2)$ doua variabile independente.

  Atunci

$$X^{\min} := \min\{X_1, X_2\} \sim Geom(p_1, p_2)$$

  si

$$P\{X^{\min} = X_i\} = \frac{1 - p_i}{1 - p_1 p_2}, \quad i \in \{1,2\}$$

Distributii discrete – Distributia Poisson

$$X \sim Poisson(a), \ a > 0$$

  – Limita unei ditributii binomiale cand $n \to \infty$ si $p \to 0$ astfel incat $np \to a$.

- Setul de valori: $S_X = \{0,1,\ldots\}$
- Probabilitatile punctuale: $P\{X = i\} = \dfrac{a^i}{i!} e^{-a}$
- Media: $E[X] = a$
- Momentul de ordinul al-II-lea: $E[X^2] = a^2 + a$
- Varianta: $D^2[X] = E[X^2] - E[X]^2 = a$

Exemple

- Sa presupunem ca
  - 200 abonati sunt conectati la o centrala locala.
  - Traficul caracteristic fiecarui abonat este de 0.01 erl
  - Abonatii se comporta independent
- Numarul apelurilor active este $X \sim Bin(200, 0.01) \quad p_i = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
- In cazul unei legi de tip Poisson $X \approx Poisson(2.0) \quad a = np = 200 \cdot 0.01 = 2$

$$p_i = \frac{a^i}{i!} e^{-a}$$

- Probabilitati punctuale:

	0	1	2	3	4	5
Bin(200, 0.01)	.1326	.2679	.2693	.1795	.0893	.0354
Poisson(2.0)	.1353	.2701	.2701	.1804	.0902	.0361

Proprietati – Distributia Poisson

- (i) Suma: Fie $X_1 \sim Poisson(a_1)$ si $X_2 \sim Poisson(a_2)$ doua variabile

  independente. Atunci:

$$X_1 + X_2 \sim Poisson(a_1 + a_2)$$

- (ii) Fie $X \sim Poisson(a)$ variabila care defineste numarul de elemente intr-un set si *Y* variabila care desemneaza marimea unui element aleator din acest set (fiecare element fiind luat independent cu probabilitatea *p).* Atunci:

$$Y \sim Poisson(pa)$$

- Sortarea aleatoare: Fie *X* si *Y* conform proprietatii (*ii*) , si $Z = X - Y$.

  Atunci Y si Z sunt independente (X fiind dat necunoscut) si

  .

$$Z \sim Poisson((1-p)a)$$

Variabile aleatoare continuue

- Definitie: Variabila aleatoare X este continua daca;
  exista o functie integrabila $f_X : R \to R_+$ astfel incat pentru toti $x \in R$

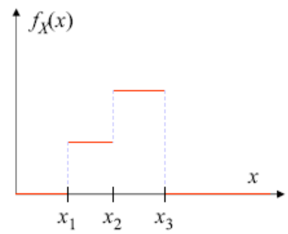
$$F_X(x) := P\{X \le x\} = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy$$

- Functia f_X este numita functie densitate de probabilitate(pdf)
  - Setul S_X , pentru care $f_X > 0$ este numit setul de valori
- Proprietati:
  - (i) $P\{X = x\} = 0$ pentru toti $x \in R$
  - (ii) $P\{a < X < b\} = P\{a \le X \le b\} = \int_a^b f_X(x)dx$
  - (iii) $P\{X \in A\} = \int_A f_X dx$
  - (iv) $P\{X \in R\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_X dx = \int_{S_X} f_X dx = 1$

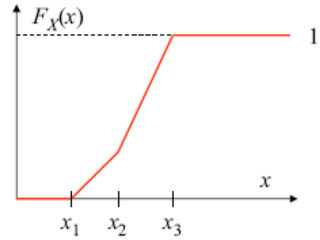
Exemple

- Functia densitate de probabilitate

$$S_X = [x_1, x_3]$$



- Functia de repartitie



Speranta matematica si alti parametrii

- Definitie: Speranta matematica a variabilei aleatoare *X* este definita astfel:

$$\mu_X := E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$$

- Nota 1: Media exista numai daca: $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)dx < \infty$
- Nota 2: Daca $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)dx = \infty$ atunci admitem ca: $E[X] = \infty$
- Media are aceleasi proprietati ca si in cazul distributiilor discrete
- Ceilalti parametrii (varianta, covarianta,…) se definesc ca si in cazul distributiilor discrete

Distributi continue– Distributia Uniforma

$$X \sim U(a,b), \quad a < b$$

- Echivalenta aruncarii zarului

- Setul de valori: $S_X = (a,b)$
- Functia densitate de probabilitate: $f_X(x) = \dfrac{1}{b-a}, \quad x \in (a,b)$
- Functia de repartitie: $F_X(x) := P\{X \le x\} = \dfrac{x-a}{b-a}, x \in (a,b)$
- Media: $E[X] = \int_a^b x/(b-a)dx = (a+b)/2$
- Momentul de ordinul al-II-lea: $E[X^2] = \int_a^b x^2/(b-a)dx = (a^2+ab+b^2)/3$
- Varianta: $D^2[X] = E[X^2] - E[X]^2 = (b-a)^2/12$

Distributii continue– Distributia exponentiala

$$X \sim Exp(\lambda), \quad \lambda > 0$$

– Echivalenta continua a distributiei geometrice (probabilitatea insuccesului)

$\approx \lambda dt$

- Setul de valori: $S_X = (0, \infty)$
- Functia densitate de probabilitate: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$
- Functia de repartitie: $F_X(x) := P\{X \le x\} = 1 - e^{-\lambda x}, \ x > 0$
- Media: $E[X] = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx = 1/\lambda$
- Momentul de ordinul al-II-lea: $E[X^2] = \int_0^\infty \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = 2/\lambda^2$
- Varianta: $D^2[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 1/\lambda^2$

Distributii continue– Distributia exponentiala

- Descrie intervalele de timp intre evenimente in cadrul unui proces Poisson, un proces in care evenimentele se produc continuu si independent, cu o rata medie constanta.
- Distributia exponentiala poate fi vazuta ca si echivalentul continuu al ditributiei geometrice care descrie numarul incercarilor Bernoulli necesare intr-un proces discret pentru schimbarea starii. Astfel, distributia exponentiala exprima ***timpul necesar unui proces continuu pentru schimbarea starii.***
- In lumea reala rata constanta reprezinta o presupunere rar intalnita. De, exemplu ratele de sosire ale apelurilor difera pe durata unei zile. Dar daca ne fixam asupra unui interval anume, cum ar fi de la 10-16 in zilele lucratoare, distributia exponentiala poate fi utilizata ca o buna aproximare pentru intervalul de timp intre apeluri.
- In teoria cozilor de asteptare ***timpii de servire*** ai clientilor unui sistem sunt adesea modelati cu ajutorul variabilelor aleatoare distribuite exponential.(Timpii inter sosiri sunt modelati prin distributii Poisson, iar lungimea procesului (privita ca o secventa de proceses independente) este modelata de o variabila ce urmeaza o distributie Erlang(care reprezinta distributia unei sume de variabile aleatoare independente distribuite exponential)

Proprietatea de memoryless a distributiei exponentiale

Distributia exponentiala are proprietatea de a fi fara memorie: Asta inseamna ca daca *X* este ditribuita exponential, atunci probabilitatea ei conditionata satisface relatia:

$$P\{X > x + y \mid X > x\} = P\{X > y\}$$

pentru toti $x, y \in (0, \infty)$

Demonstratie:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B) = P\{X > x\} = \int_x^{\infty} \lambda e^{-\lambda u} du = e^{-\lambda x}$$

$$P(A) = P\{X > x + y\} = \int_{x+y}^{\infty} \lambda e^{-\lambda u} du = e^{-\lambda (x+y)}$$

$$P(A \cap B) = P\{X > x + y \; si \; X > x\} = P\{X > x + y\} = e^{-\lambda (x+y)}$$

$$P\{X > x + y \mid X > x\} = \frac{e^{-\lambda (x+y)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda y}$$

Proprietatea de memoryless a distributiei exponentiale

- Aplicatii:
  - Sa presupunem ca timpul de ocupare al unei linii telefonice este distribuit exponential cu media *h* (min);
  - Sa presupunem ca un apel are deja o intarziere de *g* minute. Datorita proprietatii de memoryless aceasta informatie nu ne spune nimic despre timpul de ocupare care a ramas: acesta e distribuit ca si timpul initial de ocupare si in medie intarzie tot *h* minute.

$$x = g$$
$$y = h$$

- Exemplu numeric:

$$T = X$$
$$g = 30 \text{ min}$$
$$y = 10 \text{ min}$$
$$P\{T > 40 \mid T > 30\} = P\{T > 10\}$$

Minimul variabilelor aleatoare exponentiale

- Fie $X_1 \sim Exp(\lambda_1)$ si $X_2 \sim Exp(\lambda_2)$ independente. Atunci:

$$X^{\min} := \min\{X_1, X_2\} \sim Exp(\lambda_1 + \lambda_2)$$

si

$$P\{X^{\min} = X_i\} = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad i \in \{1,2\}$$

$$P\{X > x\} = e^{-\lambda x}$$

Distributi continue– Distributia normala (Gaussiana) standard

$$X \sim N(0,1)$$

– Limita sumei normalizate a variabilelor IID cu media 0 si varianta 1

- Setul de valori: $S_X = (-\infty, \infty)$
- Functia densitate de probabilitate: $f_X(x) = \varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$
- Functia de repartitie: $F_X(x) := P\{X \le x\} = \Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \varphi(y) dy$
- Media: $E[X] = 0$
- Varianta: $D^2[X] = 1$

Distributii continue– Distributia normala (Gaussiana)

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), \quad \mu \in R, \quad \sigma > 0$$

– Daca $(X - \mu)/\sigma \sim N(0,1)$

- Setul de valori: $S_X = (-\infty, \infty)$
- Functia densitate de probabilitate: $f_X(x) = F_X{}'(x) = \dfrac{1}{\sigma}\varphi(\dfrac{x-\mu}{\sigma})$
- Functia de repartitie: $F_X(x) := P\{X \le x\} = P\{\dfrac{X-\mu}{\sigma} \le \dfrac{x-\mu}{\sigma}\} = \Phi(\dfrac{x-\mu}{\sigma})$
- Media: $E[X] = \mu + \sigma E[(X-\mu)/\sigma] = \mu$
- Varianta: $D^2[X] = \sigma^2 D^2[(X-\mu)/\sigma] = \sigma^2$

Proprietati– Distributia normala (Gaussiana)

– (i) transformare liniara: fie $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ si $\alpha, \beta \in R$

$$Y := \alpha X + \beta \sim N(\alpha\mu + \beta, \alpha^2\sigma^2)$$

– (ii) Suma: fie $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1{}^2)$ si $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2{}^2)$

$$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

– (iii) media esantioanelor: fie variabilele IID: $X_i \sim N(\mu, \sigma^2), i = 1, \ldots, n$
Are loc relatia:

$$\overline{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$$

Teorema limita centrala

- Fie: $X_1,\ldots,X_n$ variabile IID cu medie μ si varianta σ^2
- Teorema limita centrala:

$$\frac{1}{\sigma/\sqrt{n}}(\overline{X_n}-\mu)\to N(0,1)$$

- Rezulta:

$$\overline{X}_n \approx N(\mu,\frac{1}{n}\sigma^2)$$

Alte variabile aleatoare

- Pe langa var aleatoare dicrete si cele continuue exista asa numitele variabile aleatoare mixte
  - Continand atat elemente continuue cat si discrete
- Exemple:
  - Timpul de asteptare al unui client W intr-o coada de asteptare $M/M/1$ are o valoare discreta la zero ($P\{W=0\}=1-\rho>0$) dar in rest distributia e continua