

## Raport de Cercetare

Grant: CNCSIS 517 Tema 2

Autori: Georgeta Budura, Corina Botoca

Universitatea: "Politehnica" Timișoara

# APLICAȚII ALE FILTRELOR NELINIARE ÎN IDENTIFICAREA ȘI COMPENSAREA NELINIARITĂȚILOR NEDORITE

## CAPITOLUL I

### INTRODUCERE

#### 1.1 Considerații generale

Tendențele actuale în proiectarea sistemelor de comunicații moderne arată că în viitor, implementările acestora se vor baza în special pe tehnicile de prelucrare numerică a semnalului și pe reducerea la minim a interfețelor analogice.

Un alt aspect luat în considerare este legat de creșterea continuă a performanțelor acestor sisteme. Eforturile depuse în acest sens au arătat că în numeroase cazuri performanțele sistemelor sunt determinate de prezența pe calea de procesare a semnalelor a unor neliniarități nedorite [1], [2], [3], [4].

Această lucrare își propune investigarea tehnicilor de modelare și a procedurilor de identificare pentru caracterizarea neliniarităților nedorite. Scopul urmărit este acela de a găsi procedeele tehnice capabile să reducă efectul acestor imperfecțiuni în sistem.

Sunt investigate două tipuri de modele împreună cu tehnicile de compensare aferente:

- modele pentru sistemele neliniare fără memorie;
- modele pentru sistemele neliniare cu memorie;

În prima categorie intră modelele bazate pe reprezentările în serie de puteri și cele bazate pe reprezentările ortogonale cu ajutorul unor polinoame.

În cea de-a doua categorie intră modelele bazate pe reprezentările cu ajutorul seriilor Volterra și a celor bazate pe reprezentările cu ajutorul seriilor Wiener.

În fiecare caz sunt abordate pe larg tehnicile de compensare aferente.

#### 1.2 Modele pentru sistemele neliniare invariante în timp fără memorie

Așa numitele modele fără memorie sunt adecvate pentru a reprezenta neliniarități în sistemele care au lărgimea benzii foarte mare, în raport cu lărgimea benzii semnalului pe care-l prelucrează. Avantajul principal al acestor modele, constă în simplitatea lor, ușurința aplicării lor, precum și în complexitatea redusă în ceea ce privește calculul.

Astfel un sistem nelinier fără memorie având intrarea  $x(t)$  și ieșirea  $y(t)$  poate fi reprezentat prin intermediul unei serii de puteri, de ordin  $N$ . În acest caz compensarea se poate realiza cu ajutorul sistemului invers prin introducerea așa-numitei post-distorsiuni. O metodă simplă de a obține o bună aproximare a sistemului invers are la bază inversa de ordin  $p$  a seriei de puteri de ordin  $N$  ce reprezintă neliniaritatea. Efectul cascaderii între sistemul de ordin  $N$  și sistemul post-invers îl constituie obținerea unui semnal de ieșire ce conține doar componenta de ordinul întâi și componente neliniare de ordin mai mare ca  $p$ .

Totuși, cuplarea încrucișată dintre termenii seriei puterii, poate cauza deseori probleme al căror rezultat constă într-o compensare nereușită, după cum reiese din capitolul 3.

O altă tehnică pentru modelarea neliniarităților fără memorie se bazează pe reprezentările cu ajutorul polinoamelor ortogonale. La fel ca și în cazul reprezentării în serie de puteri, inversarea seriilor ortogonale poate fi folosită pentru a compensa sistemul original, aplicând post-distorsiunea. Această lucrare dezvoltă o nouă metodă de inversare, bazată pe înlăturarea până la termenii ortogonali de ordin  $p$  și verifică dacă această tehnică produce o mai bună compensare decât cea bazată pe inversarea seriilor de puteri.

Aceste modele fără memorie și inversele lor sunt foarte simple dar aplicarea lor este limitată deoarece ambele presupun o lărgime infinită a benzii sistemului.

În cazurile în care banda sistemului este limitată sunt necesare modele mult mai complexe, care să ia în considerare memoria sistemului, cum ar fi cele bazate pe reprezentarea cu ajutorul seriei Volterra și cele bazate pe reprezentarea cu ajutorul seriei Wiener.

### 1.3 Modele pentru sisteme neliniare invariante în timp cu memorie

În paragraful 1.2 am arătat că sistemele neliniare fără memorie pot fi modelate folosind funcții și coeficienți. În același fel, cele mai utilizate modele, Volterra și Wiener, se folosesc de nuclee de funcționale pentru a reprezenta o clasă largă de sisteme neliniare cu memorie.

Modelul Volterra de ordinul  $N$  este reprezentat de o sumă de operatori Volterra omogeni, notați  $H_n[x(t)]$ , așa după cum rezultă din relația de mai jos.

$$y(t) = H_0 + H_1[x(t)] + H_2[x(t)] + \dots + H_n[x(t)] + \dots + H_N[x(t)] \quad (1.1)$$

Pentru a modela un sistem folosind seria Volterra, trebuie să fie approximate nucleele Volterra ale sistemului notate  $h_n$  și atașate fiecărui operator  $H_n$ . Se pot folosi mai multe metode pentru a estima nucleele Volterra ale unui sistem, așa după cum se va arăta în capitolul 2.

Modelul Wiener de ordinul  $N$  este reprezentat de o sumă de funcționale Wiener până la ordinul  $N$  așa cum rezultă din relația de mai jos.

$$y(t) = K_0[k_0; x(t)] + K_1[k_1; x(t)] + \dots + K_n[k_n; x(t)] + \dots + K_N[k_N; x(t)] \quad (1.2)$$

În acest caz fiecărei funcționale de ordin  $n$ ,  $K_n$ , îi corespunde un nucleu Wiener de același ordin, notat  $k_n$ . Fiecare funcțională Wiener poate fi privită ca o funcție a semnalului de intrare.

Funcționalele Wiener sunt ortogonale în cazul unui semnal de intrare alb Gaussian și aceasta conduce la o metodă directă de estimare a nucleelor Wiener prin metoda intercorelației între semnalul de intrare și cel de ieșire al filtrului.

Modelele Volterra și Wiener pot fi folosite pentru a reprezenta și pentru a compensa neliniarități nedorite care conțin memorie. Aceasta implică o procedură de măsurare pentru estimarea parametrilor modelului urmată de determinarea inversului de ordin  $p$  al modelului.

Din nou, ca și în cazul sistemelor fără memorie, este implementată compensarea, folosind sistemul invers pentru a aplica post-distorsiunea.

### 1.4 Metode de compensare a neliniarităților

În cadrul lucrării se vor studia atât metodele de compensare a neliniarităților fără memorie cât și a celor cu memorie.

În cazul compensării neliniarităților fără memorie s-au elaborat metode de compensare corespunzătoare reprezentării neliniarităților cu ajutorul seriilor de puteri cât și metode corespunzătoare reprezentării neliniarităților cu ajutorul polinoamelor ortogonale.

În ambele cazuri compensarea s-a realizat prin aplicare unei post-distorsiuni. Ordinul sistemului prin care se realizează acest lucru este același cu ordinul neliniarității ce se dorește a fi înlăturată.

Astfel, în cazul compensării de tip post-distorsiune, bazată pe seria de puteri inversă aproximantă, de un anumit ordin, se pot compensa cu succes neliniarități din sistem de ordin egal cu cel al sistemului invers pentru un interval finit a amplitudinii semnalului de intrare. În afara acestui interval, sistemul și compensatorul produc un grad de distorsiune mai mare decât sistemul original.

Deși problema compensării neliniarităților fără memorie este relativ simplă, iar metodele analitice folosite elementare, totuși concluziile ce se desprind își vor dovedi utilitățile și în cazul sistemelor neliniare cu memorie.

Pentru sistemele neliniare cu memorie problema compensării neliniarităților nedorite este abordată pe două direcții diferite:

- compensarea cu ajutorul sistemului neliniar Volterra post-invers de un anumit ordin.
- compensarea cu ajutorul sistemului Volterra adaptiv.

În primul caz alegerea ordinului sistemului neliniar prin care se realizează compensarea presupune o bună cunoaștere în prealabil a neliniarității ce se cere a fi compensată. Acest lucru se poate realiza printr-o bună identificare a sistemului neliniar. Din aceasta cauză, în cadrul lucrării se acordă o importanță deosebită metodelor de identificare a sistemelor neliniare folosind modelele

Volterra si Wiener. Se vor studia deasemenea metodele de măsurare a celor două tipuri de nuclee Volterra, respectiv Wiener care intervin în modelarea sistemelor.

În cel de al doilea caz identificarea neliniarităților nu este necesară întrucât problema compensării se realizează prin intermediul unui sistem adaptiv ce are la bază un filtru Volterra adaptiv.

## CAPITOLUL II

### TEHNICI DE MODELARE A SISTEMELOR NELINIARE

#### 2.1 Modelarea sistemelor neliniare fără memorie

##### 2.1.1 Modele bazate pe serii de puteri

Așa-numitele "modele fără memorie" sunt adecvate reprezentării neliniarităților ce apar în acele sisteme a căror bandă de frecvență este foarte mare comparativ cu cea a semnalului pe care îl prelucrează. Avantajele principale pe care le prezintă aceste modele sunt date de faptul că ele sunt simple, ușor de implementat și nu necesită un efort de calcul deosebit.

Astfel un sistem neliniar în timp continuu fără memorie, având semnalul de intrare  $x(t)$  și ieșirea  $y(t)$ , poate fi reprezentat în domeniul timp cu ajutorul unei dezvoltări în serie de puteri, de ordin  $N$ .

$$y(t) = f(x(t)) = f_0 + f_1 x(t) + f_2 x^2(t) + \dots + f_N x^N(t) \quad (2.1)$$

Coeficienții  $\{f_i\}$  se pot determina prin mai multe metode ca de exemplu: algoritmi adaptivi. Valorile coeficienților  $\{f_i\}$  reprezintă o măsură a neliniarității sistemului.

##### 2.1.2. Modele bazate pe polinoame ortogonale

Un sistem neliniar fără memorie poate fi reprezentat sub forma unei descompunerii Fourier generalizate ca o sumă de polinoame ortogonale. Seturile de polinoame ortogonale sunt adecvate diferitelor tipuri de semnale de intrare prelucrate de către sistem.

Relația intrare-ieșire în acest caz poate fi exprimată fie pe cale matematică, atunci când acest lucru e posibil, fie prin măsurarea coeficienților dezvoltării Fourier în cazul în care există o implementare a sistemului. Cele mai cunoscute metode de măsurare se bazează pe intercorelația semnalelor de intrare și ieșire.

Fie cazul unui semnal de intrare a cărui funcție densitate de probabilitate  $p(x)$  poate fi exprimată sub forma diagonală:

$$p(x, x_D, \zeta) = p(x)p(x_D) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(\tau)}{C_n} \Phi_n(x)\Phi_n(x_D) \quad (2.2)$$

unde:

$x = x(t)$  și  $x_D = x(t + \zeta)$ , iar  $\{\Phi_k(\cdot)\}$  reprezintă un set complet de funcții ortogonale care în majoritatea cazurilor sunt polinoame.

$C_n$  - este valoarea medie pătratică a lui  $\Phi_n(x)$  și  $c_n a_n(\tau)$  este funcția sa de autocorelație.

Dacă se ține cont de proprietatea de ortogonalitate a polinoamelor  $\Phi_n(x)$  și  $\Phi_k(x)$ , aparținând setului de polinoame ortogonale asociat lui  $x(t)$ , atunci este satisfăcută egalitatea dată de relația (2.3):

$$E[\Phi_n(x)\Phi_k(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(x)\Phi_k(x)p(x)dx = C_n \delta_{nk} \quad (2.3)$$

unde  $\delta_{nk}$  este simbolul lui Kronecher.

O importanță deosebită pentru aplicațiile practice îl reprezintă cazul unui semnal de intrare sinusoidal:  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \Theta)$ , avînd amplitudinea constantă  $A$ , frecvența  $f_0$  și faza  $\Theta$  uniform distribută în intervalul  $[0, 2\pi]$ . În acest caz  $p_x(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}$ , în intervalul  $(-A, A)$  și zero în rest.

Funcțiile ortogonale sunt în acest caz polinoamele Cebîșev definite mai jos :

$$\Phi_n(x) = T_n(x/A) \quad (2.4)$$

Deasemenea avem:  $a_n(\tau) = \cos(n2\pi f_0 \tau)$  și  $C_n = 1$ , pentru  $n=0$  și în rest:  $C_n = 0,5$ .

Un alt caz important în aplicațiile practice este cel al semnalului zgomot alb gaussian de medie nulă și varianță  $\sigma^2$ . În cazul acestui semnal de intrare, setul de funcții ortogonale este reprezentat de polinoamele Hermite,  $\Phi_n = He_n\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ .

Pentru  $a_n(\tau)$  se obține expresia:

$$a_n(\tau) = [R_x(\tau)]^n / \sigma^{2n} \quad (2.5)$$

unde:  $R_x(\tau)$  este funcția de autocorelație a semnalului de intrare. În acest caz  $C_n = n!$ .

În cazul acestui tip de semnal de intrare și în virtutea unor condiții matematice întodeauna satisfacuate în practică, ieșirea unui sistem nelinier fără memorie  $y = f(\cdot)$  poate fi scrisă ca o sumă de polinoame ortogonale după cum este indicat în relația :

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n}{C_n} \Phi_n(x) \quad (2.6)$$

Coeficienții  $h_n$  se pot determina pe baza produsului scalar între funcția  $f$  și elementele bazei așa după cum se indică în relația (2.7).

$$h_n = E[f(x)\Phi_n(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Phi_n(x)p(x)dx \quad (2.7)$$

Funcția de autocorelație a semnalului de ieșire este:

$$R_y(\tau) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x)f(x_D)p(x, x_D, \tau)dx dx_D \quad (2.8)$$

și poate fi scrisă în virtutea relației (2.2) și (2.8) sub forma :

$$R_y(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n}{C_n} a_n(\tau) \quad (2.9)$$

În cazurile în care dispunem de o implementare a funcției  $f$ , dar forma ei analitică este necunoscută setul de coeficienți  $\{h_n\}$  vor fi mai degrabă estimați decît calculați.

Presupunînd că procesul de intrare este ergodic și înlocuind medierile statistice cu medieri temporale se obține o tehnică de identificare bazată pe funcția de intercorelație.

$$h_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x(t))\Phi_n(x(t))dt \quad (2.10)$$

Întrucît procesul de identificare are loc în timp discret avem:

$$h_n = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^K f(x[k]) \Phi_n(x[k]) \quad (2.11)$$

În fig. 2.1. este reprezentat schematic procesul de identificare.

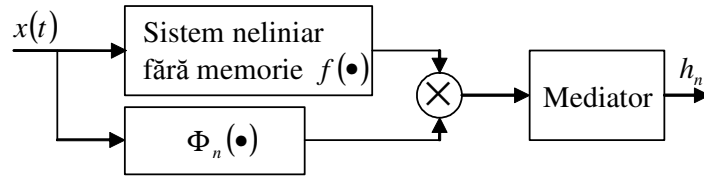


Fig.2.1 Identificarea sistemului neliniar utilizând polinoame ortogonale

## 2.2 Modelarea sistemelor neliniare cu memorie

Modelele prezentate în paragrafele anterioare utilizează coeficienți și funcții pentru reprezentarea sistemelor neliniare fără memorie. Așa după cum se va vedea în cele ce urmează reprezentările Volterra și Wiener utilizează nuclee și funcționale pentru a caracteriza o clasă importantă de sisteme neliniare cu memorie. Ambele constituie modele de tipul mediatoarelor neliniare alunecătoare [5],[6],[7].

În tabelul 2.1 este realizată o comparație privind parametrii tipurilor de modele considerate în cadrul lucrării.

TABELUL 2.1

Tipul sistemului	Tipul modelului	Tipul bazei utilizate pentru reprezentări	Tipul nucleelor în cadrul reprezentărilor
Sistem neliniar fără memorie	Model bazat pe dezvoltarea în serie de puteri	Puteri ale lui x	Coeficienți constanți
Sistem neliniar fără memorie	Model bazat pe dezvoltarea în serie ortogonală	Funcții ortogonale	Coeficienți constanți
Sistem neliniar cu memorie	Model Volterra	Funcționale Volterra	Nuclee Volterra
Sistem neliniar cu memorie	Model Wiener	Funcționale Wiener ortogonale	Nuclee Wiener

În virtutea condițiilor stabilite de teorema lui Weierstrass modelele Volterra și Wiener de un anumit ordin, pot reprezenta neliniarități de orice ordin și pentru un domeniu limitat al amplitudinii semnalului de intrare.

Aplicații ale acestor modele se întâlnesc în domenii dintre cele mai variate: de la modelarea sistemelor biologice, la modelarea interacțiunii între platformele maritime și valurile oceanice, modelarea canalelor de transmisiune prin sateliți [8],[9],[10] etc.

### 2.2.1 Modelul Volterra

Pentru un sistem neliniar cu memorie, ca cel din figura 2.2 modelul Volterra de ordin este reprezentat de suma de funcționale omogene  $H_n[\cdot]$  de ordin maxim  $N$  [5].

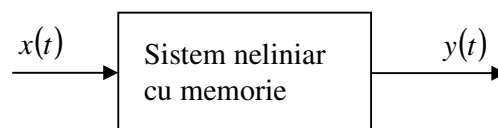


Fig. 2.2 Sistem neliniar cu memorie supus modelării.

$$y(t) = H_0 + H_1[x(t)] + H_2[x(t)] + \dots + H_i[x(t)] + \dots + H_N[x(t)] \quad (2.12)$$

unde:  $H_0 = h_0$  și reprezintă componenta de curent continuu, iar  $H_i[x(t)]$  este operatorul Volterra de ordin  $i$  definit de relația :

$$H_i[x(t)] = \int \dots \int h_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) \dots x(t - \tau_i) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_i \quad (2.13)$$

Funcția  $h_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i)$  reprezintă nucleul Volterra de ordin  $i$ .

Pentru,  $i=1$  se obține  $h_1(t)$ , nucleul de ordinul întâi ce caracterizează operatorul liniar  $H_1[x(t)]$ . Această funcție mai poartă numele de răspuns la impuls al sistemului liniar.

Modelul Volterra în timp discret de ordin  $N$  se poate scrie sub forma [7]:

$$\begin{aligned} y[n] = & \sum_{m_1=0}^{\infty} h_1[m_1] x[n - m_1] + \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} h_2[m_1, m_2] x[n - m_1] x[n - m_2] + \\ & \dots + \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_i=0}^{\infty} h_i[m_1, m_2, \dots, m_i] x[n - m_1] x[n - m_2] \dots x[n - m_i] + \dots \\ & \dots + \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_N=0}^{\infty} h_N[m_1, m_2, \dots, m_N] x[n - m_1] x[n - m_2] \dots x[n - m_N] \end{aligned} \quad (2.14)$$

În cazurile practice trebuie înlocuită limita superioară  $\infty$  cu valoarea  $M$ , finită, ce reprezintă memoria nucleului respectiv. Aceasta poate diferi în funcție de ordinul nucleului considerat.

O altă simplificare ce poate fi adusă relației (2.14) rezultă din presupunerea că nucleele Volterra sunt funcții simetrice. Această proprietate stabilește că valoarea nucleelor rămâne aceeași în cazul permutărilor indicilor  $m_1, m_2, \dots, m_N$ . În cazul nucleului de ordin al II-lea proprietatea de simetrie este ilustrată de relația :

$$h_2[m_1, m_2] = h_2[m_2, m_1]; \quad \forall m_1, m_2 \quad (2.15)$$

Orice nucleu Volterra asimetric poate fi simetrizat pe baza unei operații așa cum se indică în relația:

$$h_n[m_1, m_2, \dots, m_n] = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\text{permutari} \\ \text{dupa } m}} h_n^*[m_1, m_2, \dots, m_n] \quad (2.16)$$

unde:  $h_n^*[m_1, m_2, \dots, m_n]$  reprezintă nucleul asimetric. În consecință, pe tot parcursul prezentării ce va urma vom lucra numai cu nuclee simetrice.

În cazul când se lucrează numai cu nuclee simetrice, relația (2.14) se poate scrie simplificat sub forma [4]:

$$\begin{aligned} y[n] = & h_0 + \sum_{m_1=0}^{M-1} h_1[m_1] x[n - m_1] + \sum_{m_1=0}^{M-1} \sum_{m_2=m_1}^{M-1} h_2[m_1, m_2] x[n - m_1] x[n - m_2] + \\ & + \sum_{m_1=0}^{M-1} \sum_{m_2=m_1}^{M-1} \sum_{m_3=m_2}^{M-1} h_3[m_1, m_2, m_3] x[n - m_1] x[n - m_2] x[n - m_3] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Unele sisteme neliniare pot avea, nuclee Volterra separabile. Un nucleu de ordin  $n$  este separabil dacă poate fi scris ca produse între nucleele de ordine inferioare.

De exemplu, există posibilitatea exprimării nucleului de ordin  $n$  ca produs de  $n$  nuclee de ordinul întâi, după cum se poate vedea în relația (2.18).

$$h_i(m_1, m_2, \dots, m_i) = h_{i_1}(m_1) h_{i_2}(m_2) \dots h_{i_i}(m_i) \quad (2.18)$$

În acest caz relația intrare - ieșire devine de forma :

$$y[n] = h_0 + \sum_{m_1=0}^{M-1} h_1[m_1]x[n-m_1] + \sum_{m_1=0}^{M-1} \sum_{m_2=m_1}^{M-1} h_{22}[m_1]h_{22}[m_2]x[n-m_1]x[n-m_2] \quad (2.19)$$

Pentru simplificare s-a ales ordinul  $N$  al sistemului egal cu 2.

Un caz particular îl constituie cazul nucleului exprimat sub forma unui produs multiplu în care intervine nucleul liniar.

$$h_i[m_1, m_2, \dots, m_i] = f_i h_1[m_1] h_1[m_2] \dots h_1[m_i] \quad (2.20)$$

Coeficienții  $f_i$  exprimă contribuția nucleului de un anumit ordin  $i$  în cadrul răspunsului.

Putem scrie  $h_1[m_1] = f_1 h_1[m_1]$  și luînd  $f_1 = 1$  în acest caz partea cu memorie a sistemului poate fi separată de partea ce conține neliniaritatea după cum apare în (2.21).

$$y[n] = h_0 + \sum_{m_1=0}^{M-1} h_1[m_1]x[n-m_1] + f_2 \left[ \sum_{m_1=0}^{M-1} h_1[m_1]x[n-m_1] \right]^2 \quad (2.21)$$

Pentru simplificarea s-a ales și în acest caz un sistem de ordinul al II-lea.

În aceste condiții putem adopta pentru sistemul neliniar cu memorie reprezentarea din figura 2.3.

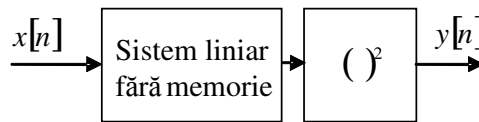


Fig. 2.3 Structura sistemului neliniar cu memorie definit de relația 2.21.

Pentru a stabili o legătură între reprezentarea sub forma unei serii de puteri și modelul Volterra, vom considera cazul în care toate nucleele au memoria egală cu zero, adică :

$$\begin{aligned} h_0 &= f_0 \\ h_1[m_1] &= f_1 \delta[m_1] \\ h_2[m_2] &= f_2 \delta[m_1] \delta[m_2] \\ &\dots \\ h_N[m_1, m_2, \dots, m_N] &= f_N \delta[m_1] \delta[m_2] \dots \delta[m_N] \end{aligned} \quad (2.22)$$

În acest caz seria Volterra se reduce la o simplă reprezentare în serie de puteri după cum se vede în relația: (2.23)

$$y[n] = f_0 + f_1 x[n] + f_2 (x[n])^2 + \dots + f_i (x[n])^i + \dots + f_N (x[n])^N \quad (2.23)$$

### 2.2.2 Modelul Wiener

Reprezentarea sistemelor neliniare cu memorie propusă de către Wiener este o sumă constituită din funcționale neomogene, ortogonale cînd semnalul de intrare este un zgomot alb-Gaussian. Setul de funcționale ortogonale a fost obținut de către Wiener prin procedeul de ortogonalizare Gram Schmidt, aplicat funcționalelor Volterra.

Proprietatea de ortogonalitate a funcționalelor Wiener oferă posibilitatea determinării nucleelelor Wiener pe baza unui procedeu bazat pe funcția de intercorelație a semnalelor de la intrarea și ieșirea sistemului neliniar.

Modelul Wiener de ordin  $n$  este reprezentat printr-o serie de funcționale așa după cum apare în relația (2.24).

$$y(t) = K_0[k_0; x(t)] + K_1[k_1; x(t)] + \dots + K_i[k_i; x(t)] + \dots + K_n[k_n; x(t)] \quad (2.24)$$

unde: prin  $K_i$  s-a notat funcționala Wiener de ordin  $i$ , iar  $k_i$  reprezintă nucleul Wiener de ordin  $i$  și argumente  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i$ .

Așa după cum s-a arătat, funcționalele Wiener se bucură de proprietatea de ortogonalitate :

$$\langle K_n[k_n; x(t)] K_m[k_m; x(t)] \rangle = 0 \text{ pentru } n \neq m \quad (2.25)$$

În relația 2.25 prin  $\langle \bullet \rangle$  s-a notat operatorul de mediere statistică.

Semnificația nucleelor  $k_n$  va fi arătată în continuare. Pentru aceasta se vor scrie explicit expresiile funcționalelor de ordin  $0 \div 3$  [7].

$$\begin{aligned} K_0[k_0; x(t)] &= k_0 \\ K_1[k_1; x(t)] &= \int_0^{\infty} k_1(\tau_1) x(t - \tau_1) d\tau_1 \\ K_2[k_2; x(t)] &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} k_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - \sigma^2 \int_0^{\infty} k_2(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 \\ K_3[k_3; x(t)] &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} k_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) x(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 - \\ &\quad - 3\sigma^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} k_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x(t - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Modelul Wiener pentru sistemele în timp discret cu memorie finită poate fi obținut printr-un procedeu similar modelului Volterra discret.

Un model Wiener cu nuclee simetrice poate fi de asemenea dezvoltat, dar spre deosebire de modelul Volterra este mai laborios datorită prezenței funcționalelor neomogene.

Expresia unui model Wiener discret de ordin 3 cu nuclee simetrice este:

$$y[n] = K_0[k_0; x[n]] + K_1[k_1; x[n]] + K_2[k_2; x[n]] + K_3[k_3; x[n]] \quad (2.27)$$

unde :

$$\begin{aligned} K_0[k_0; x[n]] &= k_0 \\ K_1[k_1; x[n]] &= \sum_{m_1=0}^{M-1} k_1[m_1] x[n - m_1] \\ K_2[k_2; x[n]] &= \sum_{m_1=0}^{M-1} \sum_{m_2=m_1}^{M-1} k_2[m_1, m_2] x[n - m_1] x[n - m_2] - \sigma^2 \sum_{m_1=0}^{M-1} k_2[m_1, m_2] \\ K_3[k_3; x[n]] &= \sum_{m_1=0}^{M-1} \sum_{m_2=m_1}^{M-1} \sum_{m_3=m_2}^{M-1} k_3[m_1, m_2, m_3] x[n - m_1] x[n - m_2] x[n - m_3] - \\ &\quad - 3\sigma^2 \sum_{m_1=0}^{M-1} k_3[m_1, m_2, m_3] x[n - m_1] - \sigma^2 \sum_{m_1=0}^{M-1} \sum_{m_2=0, m_2 \neq m_1}^{M-1} k_3[m_1, m_2, m_3] x[n - m_1] x[n - m_2] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Modelul Wiener poate fi comparat cu dezvoltarea în serie cu ajutorul polinoamelor Hermite. Se poate demonstra că, dacă în relațiile (2.26) se folosesc nuclee Wiener fără memorie, funcționalele Wiener degenerază în polinoame Hermite [7].

Avantajele oferite de proprietatea de ortogonalitate sunt multiple:

- posibilitatea măsurării nucleelor prin intercorelația intrare - ieșire.



- valoarea nucleelor Volterra depinde de ordinul reprezentării. În cazul modificării acestuia se modifică valorile nucleelor. Dacă ordinul seriei Volterra corespunde ordinului sistemului modelat o nouă creștere a ordinului seriei nu va produce modificarea nucleelor. Dacă însă nu se cunoaște ordinul sistemului și ca atare nici ordinul seriei Volterra, atunci pe măsură ce se introduc nuclee de ordin superior în cadrul modelului cele de ordin inferior trebuie recalculate.

- seria Wiener fiind completă și ortogonală nucleele Wiener sunt întodeauna optime în sensul erorii medii pătratice. În acest caz dacă ordinul modelului este crescut, nucleele Wiener de ordin inferior nu se modifică și nu trebuie reestimate. Numai nucleul superior adăugat trebuie estimat.

### 2.2.3 Relația între nucleele Wiener și nucleele Volterra

În unele situații este necesară deducerea nucleelor Volterra pe baza setului de nuclee Wiener sau invers.

Setul de nuclee Volterra poate fi obținut din setul de nuclee Wiener utilizând relațiile de mai jos.

Exemplificarea se va face în cazul unui sistem de ordin 3.

$$h_0 = k_0 + k_{0(2)} \quad (2.29)$$

unde:

$$k_{0(2)} = -\sigma^2 \int_0^{\infty} k_2(\tau_1, \tau_1) d\tau_1 \quad (2.30)$$

Pentru nucleul Volterra de ordin întâi se obține :

$$h_1(\tau_1) = k_1(\tau_1) + k_{1(3)}(\tau_1) \quad (2.31)$$

unde :

$$k_{1(3)}(\tau_1) = -3\tau^2 \int_0^{\infty} k_3(\tau_1, \tau_2, \tau_2) d\tau_2 \quad (2.32)$$

Pentru nucleul Volterra de ordin doi avem :

$$h_2(\tau_1, \tau_2) = k_2(\tau_2, \tau_2) \quad (2.33)$$

și

$$h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = k_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \quad (2.34)$$

Relațiile între modelele Volterra și Wiener demonstrează că primele se modifică o dată cu creșterea ordinului seriei prin care se face modelarea întrucât așa după cum se vede din (2.31) în calculul nucleelor intervin nucleele Wiener de ordin superior.

## CAPITOLUL III

### TEHNICI DE COMPENSARE A NELINIARITĂȚILOR INTRODUSE DE SISTEMELE FĂRĂ MEMORIE

#### 3.1 Compensarea neliniarităților în cazul modelului neliniar bazat pe seria de puteri

Se realizează prin introducerea în lanțul de prelucrare a semnalului a așa-numitului sistem invers. În cazul în care el este plasat după sistemul ale cărui neliniarități se cer a fi compensate vorbim de "post-distorsionare". O metodă simplă de a construi sistemul invers în cazul modelului bazat pe dezvoltarea în serie de puteri de ordin  $N$  se bazează pe utilizarea inversei de ordin  $p$  a seriei de puteri.

Seria de puteri inversă de ordin  $p$  este definită prin aceea că plasată în cascadă cu un sistem neliniar de ordin  $n$ , așa după cum se indică în figura 3.1, produce la ieșire un semnal conform cu relația 3.1.

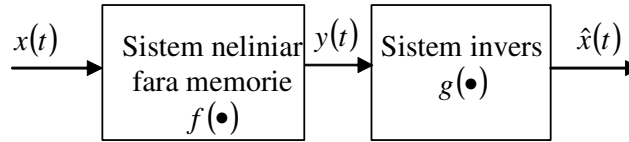


Fig.3.1 Compensarea neliniarităților prin post-distorsionare

$$g(y) = g_1 y + g_2 y^2 + g_3 y^3 + \dots + g_p y^p \quad (3.1)$$

unde:

$$g_1 = 1/f_1$$

$$g_2 = -f_2/(f_1)^3$$

$$g_3 = \frac{2(f_2)^2 - f_1 f_3}{f_1^5} \quad (3.2)$$

În relația (3.1) coeficienții  $f_i$  sunt cei din dezvoltarea în serie de puteri (2.1). Prin cascada celor două sisteme sunt eliminați toți termenii ce reprezintă puteri pînă la ordinul  $p$ , în semnalul de ieșire apărând componente liniare și termeni neliniari superiori lui  $p$ .

$$\hat{x} = g(f(x)) = x + k_{p+1}x^{p+1} + k_{p+2}x^{p+2} + \dots \quad (3.3)$$

În cazul semnalelor de intrare de amplitudine joasă, efectul acestor termeni este neglijabil și rezultatul compunerii îl reprezintă eliminarea efectului nedorit al neliniarităților.

Dacă însă nivelul semnalului de intrare este crescut peste un anumit prag efectul acestor neliniarități este atât de mare încît performanțele sistemului compensat sunt mult inferioare celui inițial.

Deasemenea trebuie subliniat faptul că post-inversa de ordin  $p$  este asociată unui model neliniar de ordin  $N$ , inferior în general, ordinului de neliniaritate al sistemului.

Ca și exemplu se consideră sistemul caracterizat de relația intrare –ieșire:

$$y = f(x) = x + cx^3 \quad (3.4)$$

unde  $c$  reprezintă o măsură a cât de puternică este neliniaritatea.

Calculând coeficienții  $g_i$  ai sistemului invers, potrivit relațiilor (3.2) se obține:  $g_1 = 1$ ,  $g_2 = 0$ ,  $g_3 = -c$ . În consecință, sistemul invers este caracterizat de relația:

$$g(y) = y - cy^3 \quad (3.5)$$

Prin conectarea în cascadă a celor două sisteme se obține:

$$g(f(x)) = x + cx^3 + c(x + cx^3)^3 = x - 3c^2x^5 - 3c^3x^7 - c^4x^9 \quad (3.6)$$

Alegând  $c = 0,1$  s-au făcut reprezentările din figura.3.2 care ilustrează compensarea neliniarităților de ordin 3.

Așa după cum se poate observa, există un interval al semnalului de intrare pentru care compunerea celor două sisteme "e mai liniară" decât sistemul original.

Limitele acestui interval se obțin rezolvând inegalitatea:

$$|g(f(x)) - x| < |f(x) - x| \quad (3.7)$$

și în acest caz au condus la soluția:  $x \in (1,61 - 1,61)$ .

În afara acestui interval rezultatul compensării 'este mai neliniar' decât sistemul inițial.

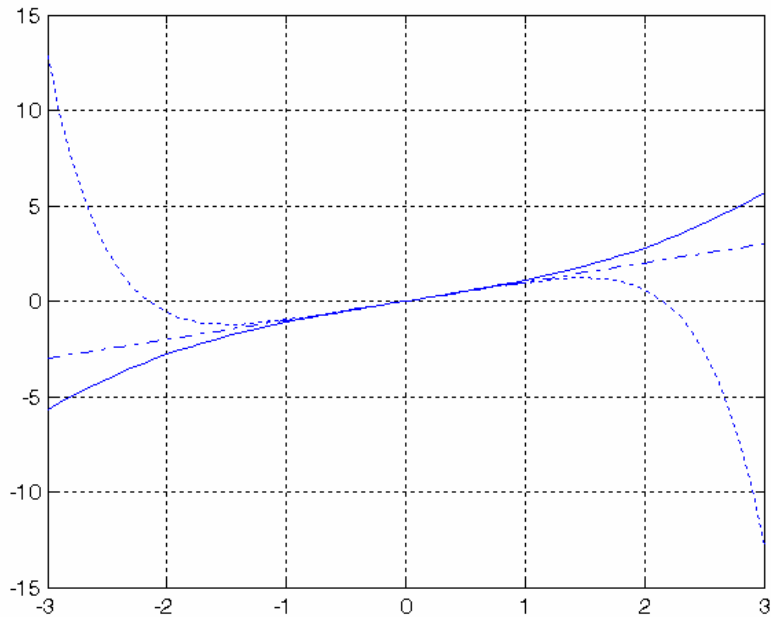


Fig. 3.2 Compensarea neliniarităților de ordin 3

În cazul unui semnal sinusoidal de intrare:

$$x = A \sin \omega t \quad (3.8)$$

ieșirea sistemului neliniar necompensat este:

$$f(x) = A \sin \omega t + c(A \sin(\omega t))^3 \quad (3.9)$$

și:

$$g(f(x)) = A \sin \omega t - 3c^2(A \sin \omega t)^5 - 3c^3(A \sin \omega t)^7 - c^4(A \sin \omega t)^9 \quad (3.10)$$

Pentru a putea compara (3.9) și (3.10) se rescriu acestea sub forma (3.11) respectiv (3.12) :

$$f(x) = \left( A + \frac{3A^3}{4} c \right) \sin \omega t - \frac{A^3}{4} c \sin 3\omega t \quad (3.11)$$

$$g(f(x)) = \left( A - 15A^5 c^2 / 8 - 103A^7 c^3 / 64 - 63A^9 c^4 / 128 \right) \sin \omega t + \left( 15A^5 c^2 / 16 + 63A^7 c^3 / 64 + 21A^9 c^4 / 64 \right) \sin 3\omega t - \left( 3A^5 c^2 / 16 + 21A^7 c^3 / 64 + 9A^9 c^4 / 64 \right) \sin 5\omega t + \left( 3A^7 c^3 / 64 + 9A^9 c^4 / 256 \right) \sin 7\omega t - 9A^9 c^4 / 256 \sin 9\omega t \quad (3.12)$$

Coeficienții din dezvoltările (3.11) și (3.12) dau amplitudinile armonicilor introduse de neliniaritate, respectiv rezultate în urma compensării. În figura 3.3 sunt reprezentate: neliniaritatea înainte compensării, precum și neliniaritățile de ordin 3, 5, 7 și 9 prezente în urma compensării, în funcție de amplitudinea semnalului de intrare. Pentru reprezentare s-a ales o scară semilogaritmică.

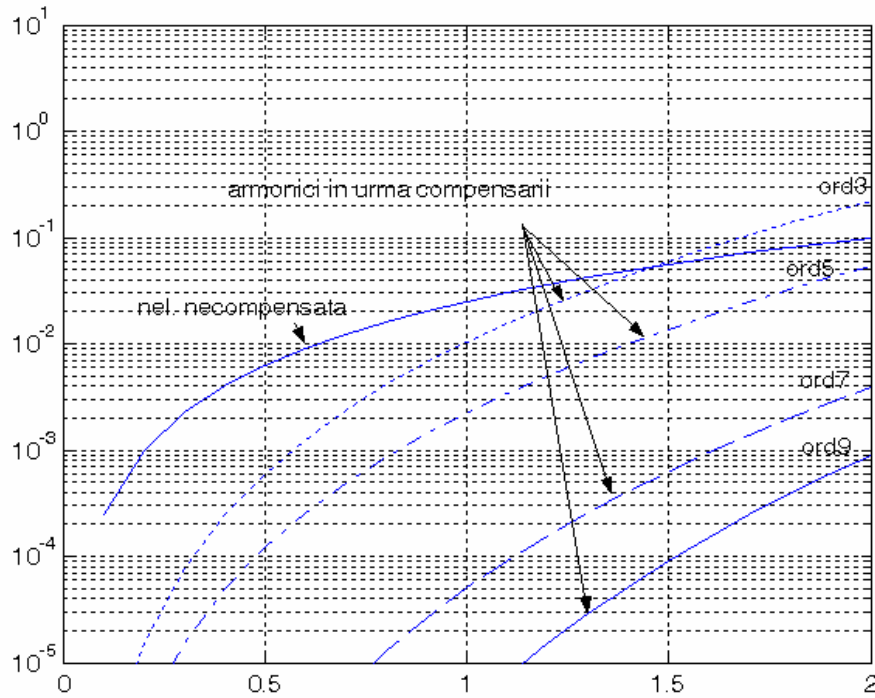


Fig.3.3 Compensarea neliniarităților de ordinul 3 în cazul semnalului de intrare sinusoidal

Se poate remarca că și în acest caz există un nivel al semnalului de intrare sub care compensarea este validă, armonică a-III-a fiind puternic atenuată.

S-a studiat de asemenea variația domeniului semnalului de intrare pentru care e valabilă compensarea în funcție de coeficientul  $c$  ce exprimă cât de puternică e neliniaritatea.

TABELUL 3.1

$c$	Intervale de compensare
0,01	$ x  < 5,10$
0,05	$ x  < 2,28$
0,1	$ x  < 1,61$
0,5	$ x  < 0,72$

### 3.2 Compensarea neliniarităților în cazul modelului bazat pe polinoame ortogonale

Se consideră două sisteme neliniare fără memorie:  $y = f(x)$  și  $z = g(y)$ , fiecare având o descompunere într-o bază ortogonală  $\Phi_n$  dată de:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}_n \Phi_n(x) \tag{3.13}$$

$$g(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{g}_m \Phi_m(y)$$

În relația (3.13)  $\tilde{f}_n$  respectiv  $\tilde{g}_m$  reprezintă coeficienții dezvoltării funcției  $f$ , respectiv coeficienții dezvoltării funcției  $g$  în baza ortogonală.

Problema care se pune este aceea de a găsi reprezentarea în baza  $\{\Phi_n\}$  a sistemului rezultat prin cascada celor două sisteme pe care îl vom numi în continuare sistem compensat:  $q(x) = g(f(x))$ . Legea de compensare conduce la:

$$q(x) = g \circ f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{g}_m \Phi_m \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}_n \Phi_n(x) \right] \quad (3.14)$$

În general nu există posibilitatea de a continua dezvoltarea în membrul drept al relației de mai sus. Acest lucru este posibil doar dacă se schimbă baza și se utilizează o baza constituită din puteri ale lui  $x$ , așa după cum se indică în relația 3.15.

$$\{t_n\}_{n=0}^{\infty}, t_n(x) = x^n \quad (3.15)$$

În acest caz avem :

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^m = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(m)} x^k \quad (3.16)$$

unde prin  $a_k^{(m)} = ({}^m * a)_k$  este reprezentată convoluția de  $m$  ori între șirurile de coeficienți  $a_k$ .

Pentru simplificare, fie :  $\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(2)} x^k$ , unde:

$$a_k^{(2)} = [a_0 \ a_1 \ a_2] * [a_0 \ a_1 \ a_2] = [a_0^2 \ 2a_0 a_1 \ 2a_0 a_2 + a_1^2 \ 2a_1 a_2 \ a_2^2]$$

Reprezentările în serie de puteri pentru cele două neliniarități sunt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \quad (3.17)$$

$$g(y) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m y^m \quad (3.18)$$

Pentru sistemul compensat avem :

$$q(x) = g(f(x)) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \right)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{\infty} g_m f_k^{(m)} \right) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k \quad (3.19)$$

unde:  $q_k = \sum_{m=0}^{\infty} g_m f_k^{(m)}$  și  $f_k^{(0)} = \delta_{0k}$ .

În acest fel s-a reușit reprezentarea sistemului compensat cu ajutorul seriei de puteri. Pentru rezolvarea problemei ridicată la începutul paragrafului trebuie parcursi următorii pași:  
-schimbarea bazei pentru cele două reprezentări ale lui funcțiilor  $f$ , respectiv  $g$  conform:

$$\Phi_n \rightarrow \{t_n\}$$

-schimbarea bazei pentru reprezentarea funcției  $q$  conform:

$$\{t_n\} \rightarrow \Phi_n$$

Pentru a ușura scrierea se vor utiliza în cele ce urmează notații matriciale și anume cele două baze vor fi reprezentate sub forme matriciale ca în relațiile 3.20 și 3.21.

$$\underline{t} = [1, x, x^2, \dots, x^n, \dots]^T \quad (3.20)$$

$$\underline{\Phi} = [\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \dots]^T \quad (3.21)$$

Relația între  $\underline{\Phi}$  și  $\underline{t}$  din ecuația 3.22 este o relație tipică de transformare a bazei :

$$\underline{\Phi} = \Phi \underline{t} \quad (3.22)$$

unde  $\Phi$  este matricea transformării corespunzătoare setului de polinoame ortogonale ales și este dată în tabele [11].

Pentru  $f^{(m)}$  se va utiliza reprezentarea sub forma unor vectori coloană:

$$\underline{f}^{(m)} = [f_0^{(m)} f_1^{(m)} f_2^{(m)} \dots f_k^{(m)} \dots]^T \quad (3.23)$$

Pentru clarificare în exemplul considerat avem:

$$\underline{f}^{(2)} = \begin{bmatrix} f_0^{(2)} \\ f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \\ f_4^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ 2a_0 a_1 \\ 2a_0 a_2 + a_1^2 \\ 2a_1 a_3 \\ a_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

-dimensiunea lui  $\underline{f}^{(2)}$  este  $5 \times 1$ .

-pentru a determina dimensiunea lui  $\underline{f}^{(3)}$  trebuie ținut cont de faptul că  $a_k^{(3)} = f^{(3)T} = [a_0 a_1 a_2] * [a_0 a_1 a_2] * [a_0 a_1 a_2]$ . În concluzie, dimensiunea sa va fi  $7 \times 1$ .

Având în vedere dimensiunea dependentă de  $(m)$  a acestor vectori coloană vom încerca crearea unei matrici  $F$  prin completarea vectorilor de dimensiuni mici cu poziții de zero.

$$F = \begin{bmatrix} f^{(0)} & f^{(1)} & f^{(2)} & | & \dots \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

În cazul considerat avem:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & a_0 & a_0 \\ 0 & a_1 & 2a_0 a_1 \\ 0 & a_2 & 2a_0 a_2 + a_1^2 \\ 0 & 0 & 2a_1 a_3 \\ 0 & 0 & a_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

În aceste condiții relația (3.19) se poate scrie sub forma matricială:

$$\underline{q} = F \bullet \underline{g} \quad (3.27)$$

Trecerea la baza  $\Phi$  se realizează conform relațiilor:

$$\underline{\tilde{q}} = \Phi^{-1T} F \bullet \underline{g} \quad (3.28)$$

$$\underline{\tilde{q}} = \Phi^{-1T} F (\Phi^T \underline{\tilde{g}}) = (\Phi^{-1T} F \Phi^T) \underline{\tilde{g}} = \Psi \underline{\tilde{g}} \quad (3.29)$$

unde:

$\underline{\tilde{q}}$  - este matricea coeficienților  $q_k$  corespunzător dezvoltării în baza  $\Phi$  ce trebuie determinată;

$\Psi$  - se determină cu relația:  $\Psi = \Phi^{-1T} F \Phi^T$  ;

În aplicații se pornește de la o funcție  $f$  cunoscută și se cere determinarea funcției inverse de ordin  $p$ , notată  $g$ , astfel încât  $g(f(x)) = \hat{x}$  să constituie un bun aproximant al lui  $x$ . În aceste condiții avem :

$$\underline{\tilde{q}} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \dots 0] \quad (3.30)$$

cu condiția:

$$\underline{\tilde{g}} = \Psi^{-1} \cdot \underline{\tilde{q}} \quad (3.31)$$

unde:

$$\Psi^{-1} = (\Phi^{-1T} F \Phi^T)^{-1} \quad (3.32)$$

$\underline{\tilde{g}}$  - (matricea coeficienților dezvoltată în baza ortogonală) se obține prin extragerea coloanei de rang doi din matricea  $\Psi^{-1}$ .

### 3.3 Calculul sistemului invers în cazul unui semnal de intrare sinusoidal.

Fie sistemul neliniar modelat conform relației (3.33).

$$y = x + 0,1|x| \quad (3.33)$$

Așa după cum se observă sistemul are o puternică componentă liniară și o componentă neliniară "slabă", ilustrând perfect cazul neliniarității nedorite și percepută ca imperfecțiune în sistem.

Reprezentarea relației (3.33) cu ajutorul polinoamelor lui Cebîșev se poate realiza fie pe cale matematică fie prin măsurarea coeficienților atașați dezvoltării. Alegerea acestor reprezentări a fost impusă de studierea comportării sistemului în prezența unui semnal de intrare  $x(t)$  sinusoidal.

Alegînd amplitudinea, semnalului de intrare sinusoidal,  $A=1$ , rezultă:

$$f(x) = 1,08488T_1(x) + 0,01698T_3(x) - 0,00242T_5(x) + \dots \quad (3.34)$$

Alegerea acestei reprezentări este utilă întrucât pe baza coeficienților de rang  $n$  din dezvoltare se poate calcula puterea armonice de rang  $n$  prezentă în semnalul de ieșire și datorată neliniarității sistemului. O aproximare de ordin  $N$ , a funcției  $f$  se poate obține trunchind dezvoltarea din relația (3.30) la rangul  $N$ . Pentru această reprezentare se poate determina o inversă de ordin  $p$ , care reprezintă în același timp o aproximare a inversei corespunzătoare sistemului descris de relația 3.33. Pentru simplificarea prezentării impunem  $N = p = (M) = 3$  în cele ce urmează.

Se alege astfel pentru  $f(x)$ , o reprezentare aproximantă de rang  $N = 3$ .

$$f(x) = 1,08488T_1(x) + 0,01698T_3(x) \quad (3.35)$$

Rezultă că în acest caz se caută un sistem invers de ordin  $p = N = 3$ .

Vectorul coeficienților dezvoltării ortogonale este în acest caz:

$$\underline{\tilde{f}} = [0 \quad 1,08488 \quad 0 \quad 0,01698]^T ; (N=3) \quad (3.36)$$

Vectorul coeficienților dezvoltării ortogonale pentru  $g$  va fi de forma:

$$\underline{\tilde{g}} = [\tilde{g}_0 \quad \tilde{g}_1 \quad \tilde{g}_2 \quad \tilde{g}_3] \quad (N = p = 3) \quad (3.37)$$

iar sistemul invers este dat de relația 3.38.

$$g(y) = \tilde{g}_0\Phi_0(y) + \tilde{g}_1\Phi_1(y) + \tilde{g}_2\Phi_2(y) + \tilde{g}_3\Phi_3(y) \quad (3.38)$$

Determinarea coeficienților  $\tilde{g}_i$  ai matricii din relația (3.37) presupune parcurgerea următorilor pași:

**Pasul 1:**

Trecerea de la baza  $\{\Phi_n\}$  la baza  $\{t_n\}$  pentru  $f$  utilizând matricea transformării:

$$\underline{f} = \Phi^T \tilde{\underline{f}}$$

$$\underline{f}^T = \tilde{\underline{f}}^T \Phi = [0 \quad 1,08488 \quad 0 \quad 0,01698] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \end{bmatrix} = [0 \quad 1,03395 \quad 0 \quad 0,0679]$$

**Pasul 2:**

Calculul vectorilor  $\underline{f}^{(m)}$  și realizarea matricei  $F$ :

$$\underline{f}^{(0)} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\underline{f}^{(1)} = [0 \quad 1,03395 \quad 0 \quad 0,06791]^T$$

$$\underline{f}^{(2)} = [0 \quad 0 \quad 1,06906 \quad 0 \quad 0,014042 \quad 0 \quad 0,004611]^T$$

$$\underline{f}^{(3)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1,105058 \quad 0 \quad 0,21779 \quad 0 \quad 0,014308 \quad 0 \quad 0,0003133]^T$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,03395 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,06906 & 0 \\ 0 & 0,06791 & 0 & 1,105058 \\ 0 & 0 & 0,014042 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,21779 \\ 0 & 0 & 0,004611 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,014308 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0003133 \end{bmatrix}_{[4 \times 10]}$$

**Pasul 3:**

Calculul matricii  $\Psi$

Matricea transformării  $\{\Phi_n\} \rightarrow \{t_n\}$ , în acest caz.

–  $\Phi^{-1T}_{[10 \times 10]}$  - este dată în tabele

–  $\Phi^T_{[4 \times 4]}$  - este dată de asemenea în tabele

Matricea  $\Psi$  recalculată în urma relației are dimensiunea  $[10 \times 4]$ . Se trunchiază aceasta la dimensiunea  $[4 \times 4]$ . Rezultă :

$$\Psi_{[4 \times 4]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,17726 & 0 \\ 0 & 1,08488 & 0 & 0,63779 \\ 0 & 0 & 1,21381 & 0 \\ 0 & 0,01698 & 0 & 1,34584 \end{bmatrix}$$

**Pasul 4:**

Calculul matricii inverse  $\Psi^{-1}$

$$\Psi_{[4 \times 4]}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,14604 & 0 \\ 0 & 0,92865 & 0 & -0,4408 \\ 0 & 0 & 0,82386 & 0 \\ 0 & -0,01171 & 0 & 0,74858 \end{bmatrix}$$

**Pasul 5:**

Calculul inversei de ordin 3.



$$\underline{\tilde{g}} = \Psi^{-1} \underline{\tilde{q}} = \Psi^{-1} [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T = [0 \ 0,92865 \ 0 \ -0,01171]^T$$

$$g(y) = 0,92865T_1(y) - 0,0117T_3(y) = 0,96378y - 0,04684y^3$$

## CAPITOLULIV

### IDENTIFICAREA NELINIARITĂȚILOR CU MEMORIE FOLOSIND MODELELE VOLTERRA ȘI WIENER

#### 4.1 Introducere

Acest capitol prezintă un studiu detaliat despre modelele Volterra și Wiener, în ceea ce privește metodele de estimare ale nucleelor atașate celor două modele prin metode adaptive.

Sunt utilizate reprezentări ale nucleelor în timp discret cu memorie trunchiată. Sunt discutate nuclee Volterra și Wiener simetrice și separabile, precum și complexitatea metodelor de estimare asociate acestora. Se prezintă de asemenea relațiile matematice dintre nucleele Volterra și Wiener.

Tehnica aleasă pentru estimarea adaptivă a nucleelor Volterra și Wiener este cea bazată pe algoritmul LMS. Aplicarea sa celor două modele neliniare, se bazează pe liniaritatea relației intrare – ieșire în raport cu nucleele, văzute ca și coeficienți ai filtrelor, așa după cum s-a arătat în tabelul 2.1.

Paragraful 4.2 dezbate în detaliu problema stabilirii limitelor în ceea ce privește pasul de avans în cadrul algoritmului LMS. O trecere în revistă a literaturii de specialitate pe această temă a pus în evidență faptul că cercetarea menționată, legată de tehnicile de estimare LMS Volterra nu este doar incompletă, ci și greșită în mai multe privințe. Scopul cercetării realizate a fost să revadă și să dezvolte metoda estimării nucleelor Volterra cu ajutorul algoritmului LMS adaptiv, și să modifice metoda astfel încât să poată fi folosită la estimarea nucleului Wiener. Se analizează relația dintre valorile pasului de avans și rata convergenței nucleului Volterra și Wiener și se oferă formule empirice pentru stabilirea pașilor de avans ai algoritmului LMS până la al cincilea ordin.

#### 4.2 Estimarea nucleelor Volterra și Wiener prin metoda adaptivă bazată pe algoritmul LMS

Metodele și algoritmi adaptivi sunt folosiți pe larg în scopul estimării nucleelor Volterra de diferite ordine. O tehnică adaptivă tipică se prezintă în fig. 4.1. Un filtru Volterra de grad și memorie fixe se adaptează la sistemul neliniar necunoscut cu ajutorul unuia dintre diverșii algoritmi de adaptare. Folosirea tehnicilor de adaptare la estimarea nucleului Volterra a fost pe larg publicată [10], [12]-[16]. Cele mai multe dintre lucrările anterioare iau în considerare filtre Volterra de ordinul 2, iar unele consideră cazul filtrului Volterra de ordinul al-III-lea. În fig. 4.1 este prezentată o tehnică de adaptare tipică. Un filtru Volterra de ordin fix și memorie finită este ales pentru a construi cu ajutorul algoritmilor adaptivi, un model pentru sistemul neliniar cu memorie.

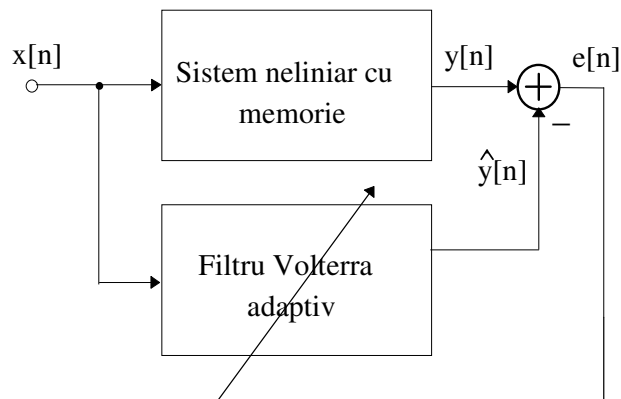


Fig.4.1 Determinarea nucleelor Volterra prin metode adaptive

Scopul acestui paragraf este să discute despre cel mai simplu dintre algoritmi, algoritmul LMS. Deși algoritmul LMS își are punctele sale slabe, cum ar fi dependența sa de statistica semnalului, fapt ce poate conduce la viteză redusă de convergență sau erori experimentale mari, este foarte ușor de aplicat și se comportă bine în comparație cu algoritmi recursivi mai rapizi.

Principalele subiecte ale acestui subcapitol sunt un studiu detaliat al literaturii de specialitate, discuția și dezvoltările ulterioare ale limitelor pasului de avans pentru convergența garantată a metodelor adaptive Volterra LMS, ca și modificarea metodei LMS pentru estimarea nucleelor Wiener. Vom oferi mai întâi o scurtă introducere pentru algoritmul LMS în cazul liniar, iar apoi vom dezbate extensia la cazul neliniar.

#### 4.2.1 Algoritmul LMS pentru filtrele adaptive liniare

Filtrele liniare adaptive LMS au fost bine documentate [17], [18]. Răspunsul la impuls al unui sistem în timp discret de memorie  $M$ , se scrie sub formă vectorială ca în (4.1), iar intrarea ca în (4.2):

$$\underline{h}_k^{(1)T} = [h_k^{(1)}[0] \quad h_k^{(1)}[1] \quad \dots \quad h_k^{(1)}[M-1]] \quad (4.1)$$

$$\underline{x}_k^{(1)T} = [x_k \quad x_{k-1} \quad \dots \quad x_{k-M+1}] \quad (4.2)$$

În aceste condiții ieșirea sistemului adaptiv e dată de relația:

$$\hat{y}_k = \underline{h}_k^{(1)T} \cdot \underline{x}_k^{(1)} \quad (4.3)$$

La momentul  $k$ , ieșirea corespunzătoare a sistemului adaptiv este  $\hat{y}_k$ , iar ieșirea filtrului liniar este  $y_k$ . Pentru algoritmul LMS, minimizăm (4.4):

$$E[e_k^2] = E\left[ \left[ y_k - \underline{h}_k^{(1)T} \cdot \underline{x}_k^{(1)} \right]^2 \right] \quad (4.4)$$

Vectorul  $\underline{h}^*$  care minimizează relația (4.4) poate fi exprimat ca o soluție a ecuațiilor normale date de (4.5):

$$\underline{h}^* = R_2^{-1} \cdot \underline{g} \quad (4.5)$$

unde:

$$R_2 = E\left[ \underline{x}_k^{(1)} \underline{x}_k^{(1)T} \right] \quad (4.6)$$

este matricea de autocorelație de intrare ce conține momentele semnalului de intrare până la ordinul al-II-lea, iar:

$$\underline{g} = E\left[ \underline{x}_k^{(1)} y_k \right] \quad (4.7)$$

este vectorul intercorelației între intrare și ieșirea dorită.

Ecuția de adaptare a coeficienților filtrului potrivit algoritmului LMS este de forma:

$$\underline{h}_{k+1}^{(1)} = \underline{h}_k^{(1)} + \mu e_k \underline{x}_k^{(1)} \quad (4.8)$$

unde:  $\underline{h}_k^{(1)}$  reprezintă vectorul coeficienților filtrului la momentul  $k$ ,  $e_k = y_k - \underline{h}_k^{(1)T} \cdot \underline{x}_k^{(1)}$ , iar  $\mu$  este o constantă de valoare mică, pozitivă, ce reprezintă mărimea pasului de adaptare ce determină viteza de convergență și influențează eroarea finală în cadrul algoritmului.

Implementarea algoritmului LMS în cazul unui filtru neliniar, bazat pe un model Volterra, implică câteva schimbări simple. Mai întâi, vectorul coeficienților de răspuns sub formă de impuls devine un vector al coeficienților nucleului Volterra. De asemenea, vectorul de intrare care în cazul liniar conținea numai o combinație liniară a intrărilor întârziate, conține acum o combinație de eșantioane întârziate. Extinderea algoritmului LMS la filtrele Volterra neliniare este explicată mai detaliat în paragraful următor.

#### 4.2.2 Algoritmul LMS pentru estimarea nucleelor Volterra

În cele ce urmează se va considera un filtru Volterra ale cărui nuclee sunt simetrice. Sunt două părți ale acestei reprezentări: (1) estimările nucleelor Volterra și (2) produsele între valorile semnalului de intrare întârziat. Dacă exprimăm nucleele Volterra și produsele între valorile semnalului de intrare în formă vectorială, atunci putem scrie ieșirea filtrului adaptiv Volterra cu ajutorul notației vectoriale.

Fiecare nucleu Volterra (estimat la momentul  $k$ ) se poate scrie în formă vectorială astfel:

- nucleul Volterra de ordin  $n$  și memorie  $M$ , la momentul  $k$ :

$$\underline{h}_k^{(n)T} = [h_k^{(n)}[0,0,\dots,0] \quad h_k^{(n)}[0,0,\dots,1] \quad \dots \quad h_k^{(n)}[M-1,M-1,\dots,M-1]] \quad (4.9)$$

- vectorul Volterra ce conține nucleele de diferite ordine:

$$\underline{h}_k^T = \left[ h_k^{(0)} \mid \underline{h}_k^{(1)T} \mid \underline{h}_k^{(2)T} \mid \dots \mid \underline{h}_k^{(n)T} \mid \dots \mid \underline{h}_k^{(N)T} \right] \quad (4.10)$$

- vectorul de intrare corespunzător neliniarității de ordin  $n$ :

$$\underline{x}_k^{(n)T} = [x_k^n \quad x_k^{n-1}x_{k-1} \quad \dots \quad x_k^{n-1}x_{k-M-1} \quad \dots \quad x_{k-M-1}^n] \quad (4.11)$$

Un vector al produselor semnalului de intrare poate fi scris luând toți vectorii corespunzători diferitelor ordine și grupându-i ca în relația (4.12):

$$\underline{x}_k^T = \left[ 1 \mid \underline{x}_k^{(1)T} \mid \underline{x}_k^{(2)T} \mid \dots \mid \underline{x}_k^{(n)T} \mid \dots \mid \underline{x}_k^{(N)T} \right] \quad (4.12)$$

În consecință, ieșirea filtrului Volterra adaptiv la momentul  $k$  este:

$$\hat{y}_k = \underline{h}_k^T \cdot \underline{x}_k \quad (4.13)$$

La momentul  $k$ , ieșirea dorită este  $y_k$ , iar ieșirea filtrului Volterra este  $\hat{y}_k$ . Pentru algoritmul LMS, trebuie să minimizăm (4.14):

$$E\{e_k^2\} = \left\{ \left[ y_k - \underline{h}_k^T \underline{x}_k \right]^2 \right\} \quad (4.14)$$

Vectorul  $\underline{h}^*$  care minimizează relația (4.14) poate fi exprimat ca soluție a ecuațiilor normale date de (4.15):

$$\underline{h}^* = R_2^{-1} \cdot \underline{g} \quad (4.15)$$

unde:  $R = E[\underline{x}_k \underline{x}_k^T]$  reprezintă matricea autocorelației semnalului de intrare și conține momentele semnalului de intrare până la ordinul  $2N$ , pentru un model de ordin  $N$ , iar  $\underline{g} = E[\underline{x}_k y_k]$  este vectorul intercorelației dintre intrare și ieșirea dorită.

Ecuția de actualizare a coeficienților filtrului Volterra este din punct de vedere formal aceeași ca și în cazul filtrului liniar:

$$\underline{h}_{k+1} = \underline{h}_k + \mu e_k \underline{x}_k \quad (4.16)$$

unde:  $\underline{h}_k$  este vectorul coeficienților nucleului Volterra la momentul  $k$ ,  $e_k = y_k - \hat{y}_k = y_k - \underline{h}_k^T \cdot \underline{x}_k$  iar  $\mu$  este o constantă de valoare mică care, ca și mai devreme, determină viteza de convergență și de asemenea afectează eroarea finală a ieșirii filtrului. Trebuie să remarcăm asemănarea de formă, în această notație, între cazul liniar dat de (4.1) - (4.8) și cazul neliniar dat de (4.9) - (4.16).

Pentru a garanta convergența algoritmului LMS, este necesar să punem limite constantei  $\mu$ . Dacă pasul de avans este mic, algoritmul LMS se adaptează încet, iar dacă algoritmului i se permite să ruleze un timp îndelungat, eroarea finală va fi redusă. Totuși, dacă se folosește un pas al avansului mai mare, algoritmul se adaptează mai rapid, dar eroarea finală va fi mai mare. Dacă pasul de avans este prea mare, atunci algoritmul poate deveni instabil și divergent. De aceea, fixarea limitelor superioare pentru convergență este de mare interes. Limita maximă a pasului de avans este legată de valorile proprii maxime ale matricei de autocorelație a vectorilor de intrare.

Se vor prezenta în cele ce urmează câteva din aspectele cele mai importante în problematica alegerii mărimii pasului  $\mu$ . În acest scop vectorii  $\underline{h}_k$  și  $\underline{x}_k$  vor fi înlocuiți de matricele  $H$  respectiv  $X$  iar scalarul  $\mu$  va fi înlocuit de către matricea  $M$ . Trebuie făcută observația că vectorii ce alcătuiesc matricele  $H$  și  $X$  au dimensiuni diferite, locurile rămase libere vor fi completate cu zerouri. Matricea  $H$  va conține ca linii vectorii nucleu  $\underline{h}_k^{(n)}$ :

$$H_k^T = \begin{bmatrix} \underline{h}_k^{(0)} & \underline{h}_k^{(1)} & \underline{h}_k^{(2)} & \dots & \underline{h}_k^{(n)} & \dots & \underline{h}_k^{(N)} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

În mod similar matricea  $X$  are liniile formate din vectori ce conțin produse de același ordin ale semnalului de intrare.

$$X_k^T = \begin{bmatrix} 1 & \underline{x}_k^{(1)} & \underline{x}_k^{(2)} & \dots & \underline{x}_k^{(n)} & \dots & \underline{x}_k^{(N)} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Matricea pasului de adaptare  $M$  este de forma:

$$M = \begin{bmatrix} \mu_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_N \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

În aceste condiții ecuația de actualizare a coeficienților filtrului devine de forma:

$$H_{k+1} = H_k + e_k M X_k \quad (4.20)$$

adică:

$$\begin{bmatrix} \underline{h}_{k+1}^{(0)} \\ \underline{h}_{k+1}^{(1)} \\ \underline{h}_{k+1}^{(2)} \\ \vdots \\ \underline{h}_{k+1}^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{h}_k^{(0)} \\ \underline{h}_k^{(1)} \\ \underline{h}_k^{(2)} \\ \vdots \\ \underline{h}_k^{(N)} \end{bmatrix} + e_k \begin{bmatrix} \mu_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{x}_k^{(1)} \\ \underline{x}_k^{(2)} \\ \vdots \\ \underline{x}_k^{(N)} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Această reprezentare permite alegerea unor pași de adaptare diferiți pentru nucleele de diferite ordine.

### 4.2.3 Limitări ale pasului de avans

Există numeroși cercetători care utilizează limite egale ale pasului avansului pentru toate nucleele, adică coeficientul  $\mu_i$  din relația (4.19) au aceeași limită. Pentru un filtru Volterra de ordinul al-II-lea cu componenta DC presupusă a fi cunoscută, [10] oferă limitele pentru  $\mu_1$  și  $\mu_2$ , de forma  $0 < \mu_1, \mu_2 < 2/\lambda_{\max}$  unde  $\lambda_{\max}$  este valoarea proprie maximă a matricei de autocorelație corespunzătoare lui vectorului de intrare  $X_k$ .

Aceste valori garantează convergența în medie. Pentru filtrul Volterra de ordinul al-II-lea, cu un interval de memorie  $M = 2$  și semnale de intrare gaussiene  $x_k$  independente și distribuite identic (i.i.d), cu medie zero și varianță  $\sigma_x^2$ , matricea de autocorelație este dată de (4.22):

$$R_4 = E\{X_k X_k^T\} = \begin{bmatrix} 1 & R_{10}^T & R_{20}^T \\ R_{10} & R_{11} & R_{21}^T \\ R_{20} & R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \sigma_x^2 & 0 & \sigma_x^2 \\ 0 & \sigma_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x^2 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_x^2 & 0 & 0 & 3\sigma_x^4 & 0 & \sigma_x^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_x^4 & 0 \\ \sigma_x^2 & 0 & 0 & \sigma_x^4 & 0 & 3\sigma_x^4 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

unde:  $R_{ij} = E\{x_K^{(i)} x_K^{(j)T}\}$  și are următoarele valori proprii:

$$\lambda_1 = \sigma_x^2, \quad \lambda_2 = \sigma_x^2, \quad \lambda_3 = \sigma_x^4, \quad \lambda_4 = 2\sigma_x^4 \quad (4.23)$$

$$\lambda_5 = \frac{1 + 4\sigma_x^4 - \sqrt{1 + 16\sigma_x^8}}{2}, \quad \lambda_6 = \frac{1 + 4\sigma_x^4 + \sqrt{1 + 16\sigma_x^8}}{2}$$

Valorile proprii sunt reprezentate grafic față de deviația standard  $\sigma_x$ , în fig. 4.2. După cum se poate vedea din fig. 4.2, mărimile valorilor proprii pentru toate valorile lui  $\sigma_x$ , sunt limitate superior de  $\lambda_6$  și în consecință:

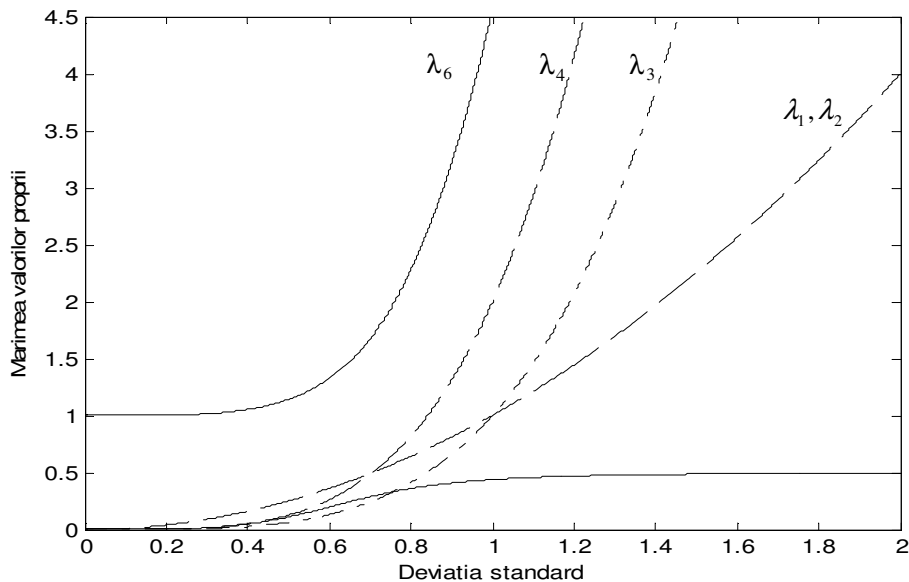


Fig.4.2 Graficul valorilor proprii față de deviația standard

$$\lambda_{\max} = \lambda_6 = \frac{1 + 4\sigma_x^4 + \sqrt{1 + 16\sigma_x^8}}{2} \quad (4.24)$$

Pentru acest exemplu, pașii avansului pot fi stabiliți conform cu (4.25):

$$0 < \mu_1, \quad \mu_2 < \frac{4}{1 + 4\sigma_x^4 + \sqrt{1 + 16\sigma_x^8}} = \lambda_6 \quad (4.25)$$

Pentru o mai mare simplificare, trebuie menționat că:

$$\sqrt{1 + 16\sigma_x^8} < 1 + 4\sigma_x^4 \quad (4.26)$$

Deci:

$$0 < \mu_1, \quad \mu_2 < \frac{2}{1 + 4\sigma_x^4} \quad (4.27)$$

Vom considera în cele ce urmează un filtru Volterra de ordinul al-II-lea pentru care se cunoaște componenta DC, astfel că ea nu va fi cuprinsă în algoritmul de estimare. În acest caz, matricea de autocorelație corespunzătoare va conține statisticile până la ordinul 4, al semnalului de intrare, dar nici o contribuție DC. De exemplu, cu un interval de memorie  $M = 2$  și semnale de intrare gaussiene  $x_k$  cu medie zero, independente și distribuite identic (i.i.d), și varianță  $\sigma_x^2$ , matricea de autocorelație va fi dată de (4.28).

$$R_4 = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\sigma_x^4 & 0 & \sigma_x^4 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_x^4 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x^4 & 0 & 3\sigma_x^4 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

pentru care valorile proprii sunt:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \sigma_x^2, \quad \lambda_3 = \sigma_x^4, \quad \lambda_4 = 2\sigma_x^4, \quad \lambda_5 = 4\sigma_x^4 \quad (4.29)$$

Spre deosebire de cazul în care avem componentă DC, aici nu există nici un număr caracteristic care să fie cel mai mare pentru toate valorile lui  $\sigma_x^2$ , iar valoarea proprie maximă este dată de:

$$\lambda_{\max} = \lambda_1 = \lambda_2 = \sigma_x^2, \text{ pentru } 0 < \sigma_x^2 < 0.5$$

$$\lambda_{\max} = \lambda_5 = 4\sigma_x^4, \text{ pentru } \sigma_x^2 > 0.5$$

Așadar, limitele sunt fixate în conformitate cu (4.30) pentru  $0 < \sigma_x^2 < 0.5$  și (4.31) pentru  $\sigma_x^2 > 0.5$ .

$$0 < \mu_1, \quad \mu_2 < \frac{2}{4\sigma_x^4} \text{ pentru } 0 < \sigma_x^2 < 0.5 \quad (4.30)$$

$$0 < \mu_1, \quad \mu_2 < \frac{2}{\sigma_x^2} \text{ pentru } \sigma_x^2 > 0.5 \quad (4.31)$$

Pentru ambele cazuri de mai sus (cu și fără termenul DC), convergența în medie pătratică poate fi garantată dacă se aplică o limită mai strânsă pasului de avans conform cu (4.32).

$$0 < \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N < \frac{2}{3tr[R_{2N}]} \quad (4.32)$$

unde  $tr[R_{2N}]$  reprezintă trasa matricei  $R_{2N}$ , adică suma elementelor de pe diagonala principală. Aceasta este întotdeauna o limită mai strânsă întrucât  $tr[R_{2N}] > \lambda_{\max}$

În cele de mai sus a fost considerat cazul unei singure limite a pasului de avans. Experimentele au dovedit însă, că atunci când este posibil, utilizarea de limite diferite ale pasului de avans și de pași diferiți ai avansului pentru nuclee de ordine diferite, pot conduce la o convergență mai rapidă a algoritmului. Pentru intrări corespunzătoare, s-a constatat de asemenea că în cazul unor semnale de intrare particulare, nucleele Volterra pare și impare devin necuplate și pot converge independent. În cele ce urmează vom considera cazul utilizării a două limite diferite ale pasului de avans, una pentru nuclee Volterra de ordin impar, iar alta pentru nuclee Volterra de ordin par.

#### 4.2.4 Limite diferite ale pasului de avans pentru nuclee de ordin par și impar

Paragraful anterior a considerat cazul matricii  $M$ , a pasului de avans din (4.19), având elementele de pe diagonală de aceeași valoare. Vom considera acum cazul în care elementele acestei matrice sunt fixate la două valori diferite, în funcție de paritatea nucleului.

Pentru un semnal de intrare având funcția densitate de probabilitate simetrică, toate momentele de ordin impar ale acestuia dispar. În plus, funcționalele Volterra de ordin impar nu sunt corelate cu funcționalele Volterra de ordin par. De exemplu, în cazul sistemului Volterra de ordin 2, componenta de ordinul întâi nu este cuplată cu componenta continuă, DC, și nici cu componenta de ordin 2. După toate probabilitățile, convergența nucleelor de ordin impar nu afectează convergența nucleelor de ordin par și invers. Pentru a asigura convergența sistemului Volterra de ordinul al-II-lea, presupunând că se cunoaște componenta DC, limitele pentru  $\mu_1$  și  $\mu_2$  sunt date astfel:  $0 < \mu_1 < 2/\lambda_{\max}$ , iar  $0 < \mu_2 < 1/\lambda_{\max}^2$  unde, ca și mai devreme,  $\lambda_{\max}$  este valoarea proprie maximă a matricii de autocorelație  $R_2$ .

Pentru un filtrul Volterra de ordinul al-II-lea cu intervalul de memorie  $M$ , și componenta DC cunoscută, se oferă limite mai strânse (convergență de medii pătratice) pentru primii doi pași ai avansului și se prezintă în (4.33):

$$0 < \mu_1 < \frac{2}{M\sigma_x^2} \text{ și } 0 < \mu_2 < \frac{2}{(M\sigma_x^2)^2} \quad (4.33)$$

Limita pentru  $\mu_1$  stabilită de relația (4.33) este fundamentată pe rezultatele cercetărilor publicate în [19] și [20]. De exemplu, [19] oferă o limită superioară mai conservatoare pentru convergența garantată, mai exact pentru un semnal de intrare gaussian independent și distribuit identic (i.i.d)  $0 < \mu_1 < \frac{2}{3M\sigma_x^2}$ . Pentru cazul gaussian (i.i.d)  $M\sigma_x^2 = tr[R_2]$ .

În [21] se consideră un filtru Volterra LMS de ordinul al-II-lea cu un semnal de intrare gaussian (i.i.d). În acest caz, componenta DC nu se consideră a fi cunoscută, ci cuprinsă în algoritmul de estimare. De vreme ce termenul DC este cuplat numai cu nucleele de ordin 2, are același pas de avans ca și nucleul de ordin 2. Limita pasului de avans de ordinul întâi este dată de  $0 < \mu_1 < 2/\sigma_x^2$ , pentru convergență în cadrul mediei și  $0 < \mu_1 < 2/M\sigma_x^2$ , pentru convergența în cadrul mediei pătratice. Limitele pasului de avans pentru ordinul al-II-lea și termenul DC sunt date de  $0 < \mu_2 < \frac{2}{(M+2)\sigma_x^4 + C_1}$  pentru convergența din cadrul mediei. Aceste limite sunt bazate pe  $\lambda_{\max} = (M+2)\sigma_x^4 + C_1$  și  $\lambda_{\min} = C_2$ , astfel încât  $C_1 + C_2 = 1$ . Formele sau valorile lui  $C_1$  și  $C_2$  nu

sunt date. Totuși, o limită ceva mai strânsă poate fi scrisă sub forma:  $0 < \mu_2 < \frac{2}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}$  unde

$\lambda_{\max} + \lambda_{\min} = (M+2)\sigma_x^4 + 1$  diferă de cea din (4.33). Incluziunea unei componente DC necunoscute în algoritm oferă un element constant în matricea de autocorelație, iar acesta dă o expresie diferită pentru valoarea proprie maximă, ca și o limită diferită pentru pasul de avans. Acest termen constant devine foarte semnificativ pentru  $\sigma_x^2 < 1$ , oferind limite foarte diferite.

Analiza limitelor impuse pașilor de adaptare a fost extinsă la filtrul Volterra de ordinul al-III-lea. Numărul lucrărilor care abordează acest subiect este până la ora actuală extrem de redus. În [22] sunt prezentate rezultatele obținute referitoare la un filtru Volterra adaptiv de ordinul al-III-lea. În cadrul algoritmului de adaptare sunt utilizați doi pași de adaptare diferiți, unul pentru nuclee de ordin par, iar celălalt pentru nuclee de ordin impar: ( $\mu_0 = \mu_2 = \mu_{par}$ ;  $\mu_1 = \mu_3 = \mu_{impar}$ ). Cele două limite sunt date de (4.34) și (4.35):

$$0 < \mu_{par} < \frac{2}{\lambda_{\max}^{par}} \quad (4.34)$$

$$0 < \mu_{impar} < \frac{2}{\lambda_{\max}^{impar}} \quad (4.35)$$

unde  $\lambda_{\max}^{par}$  este valoarea proprie maximă a matricei de autocorelație ce conține momentele de ordin par  $R_{par}$ , asociată cu neliniaritățile de ordin par, iar  $\lambda_{\max}^{impar}$  este valoarea proprie maximă pentru matricea de autocorelație ce conține momente de ordin impar  $R_{impar}$ , asociată cu neliniaritățile de ordin impar. Limitele pasului de avans de ordin par pentru convergență în cadrul mediei sunt date după cum urmează:

$$0 < \mu_{par} < \frac{2}{(M+2)\sigma_x^4 + K_1} \quad (4.36)$$

unde:

$$\lambda_{\max}^{par} = (M+2)\sigma_x^4 + K_1 \text{ și } \lambda_{\min}^{par} = K_2 \text{ pentru } K_1 + K_2 = 1 \quad (4.37)$$

Deci putem deduce o limită de ordin par ceva mai strânsă, dată de:

$$0 < \mu_{par} < \frac{2}{\lambda_{\max}^{par} + \lambda_{\min}^{par}} = \frac{2}{(M+2)\sigma_x^4 + 1} \quad (4.38)$$

Limitele pasului de avans de ordin impar pentru convergență în cadrul mediei sunt date astfel:

$$0 < \mu_{impar} < \frac{2}{(M+16)\sigma_x^6} \quad (4.39)$$

Totuși, limita pentru  $\mu_{impar}$  s-a bazat pe aproximarea făcută valorii proprii efective  $\lambda_{\max}^{impar}$ , în care s-a eliminat termenul  $\sigma_x^2$ . Asta face inexactă limita pentru valori mici ale lui  $\sigma_x$ , mai ales dacă  $\sigma_x < 1$ .

Din cunoștințele autorilor, la ora actuală încă nu s-au obținut limitele pasului de avans pentru filtrele adaptive Volterra LMS de ordin mai mare decât 3. Cercetările întreprinse au arătat că există posibilitatea extinderii metodei la un filtru de ordin  $N$ . Problema care trebuie rezolvată este aceea de a obține o bună aproximare a valorii proprii maxime a matricei de autocorelație în acest caz. Odată determinate aceste valori ele pot fi folosite pentru a stabili limitele pasului de avans.



## Capitolul V

### TEHNICI DE COMPENSARE A NELINIARITĂȚILOR CU MEMORIE

#### 5.1 Generalități

În capitolele anterioare s-au prezentat modelele Volterra și Wiener precum și metode de estimare ale nucleelor corespunzătoare acestor modele. Estimarea acestor nucleee prezintă o importanță deosebită și trebuie realizată cu multă acuratețe pentru a obține un sistem neliniar care să caracterizeze cât mai exact prezența neliniarităților nedorite ce trebuiesc compensate.

Compensarea se poate realiza ca și în cazul neliniarităților fără memorie aplicând tehnica post-distorsionării prin introducerea unui sistem invers sistemului model determinat pe cale experimentală. Sistemul post invers poate fi construit pe cale analitică sau prin metode adaptive.

Se prezintă în continuare două metode de compensare a neliniarităților nedorite cu memorie prin intermediul unui sistem Volterra.

- în primul caz sistemul Volterra ce realizează compensarea e obținut pe cale analitică;
- în al doilea caz sistemul Volterra de post-compensare e obținut prin metode adaptive.

#### 5.2 Obținerea sistemului Volterra post-invers pe cale analitică

Ne propunem să determinăm sistemul Volterra post-invers corespunzător unui sistem Volterra de ordin 3.

Pentru a ușura scrierea relațiilor se introduc următoarele notații:

$H_{(N)}[\cdot]$  - reprezintă un model Volterra de ordin  $N$

$H_n[\cdot]$  - reprezintă un operator Volterra de ordin  $n$

În consecință, pentru un model Volterra de ordin  $N$  vom folosi relația (5.1):

$$y(t) = H_{(N)}[x(t)] = H_0 + H_1[x(t)] + H_2[x(t)] + \dots + H_N[x(t)] \quad (5.1)$$

Compensarea prin intermediul sistemului invers de un anumit ordin  $p$ , se realizează conform schemei indicate în figura 5.1

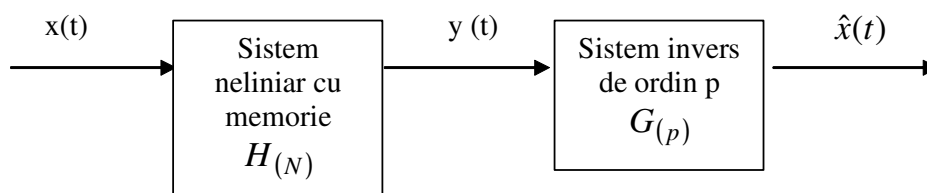


Fig.5.1 Compensarea neliniarităților prin sistemul post-invers

Ieșirea compensată  $\hat{x}(t)$  trebuie să reprezinte o bună aproximare pentru  $x(t)$ .

În figura 5.1  $G_{(p)}[\cdot]$  este un model Volterra invers, iar prin  $G_m[\cdot]$  s-a notat operatorul Volterra de ordin  $m$  invers. Semnalul de la ieșirea sistemului  $G_{(p)}$  este dat de relația:

$$G_{(p)}[x(t)] = G_0 + G_1[y(t)] + G_2[y(t)] + \dots + G_p[y(t)] \quad (5.2)$$

Construirea sistemului invers este astfel realizată încât sistemul echivalent celui reprezentat în figura 5.1 să fie un sistem Volterra având nucleele:

- nucleu de ordin întâi egal cu impulsul unitar;
- nucleele de ordin  $j = \overline{2, p}$ , egale cu zero, așa după cum rezultă din relația (5.3):

$$\hat{x}(t) = G_{(p)}[H_{(N)}[x(t)]] = Q[x(t)] = x + Q_{p+1}[x(t)] + Q_{p+2}[x(t)] + \dots + Q_{pN}[x(t)] =$$

$$Q[x(t)] = Q[x(t)] = x + \sum_{j=p+1}^{pN} Q_j[x(t)] \quad (5.3)$$

Ne propunem să determinăm post-inversa de ordin 3;  $G_{(3)}[.]$ . Ignorând componenta continuă din cadrul modelului, pentru  $G_{(3)}$  se obține schema:

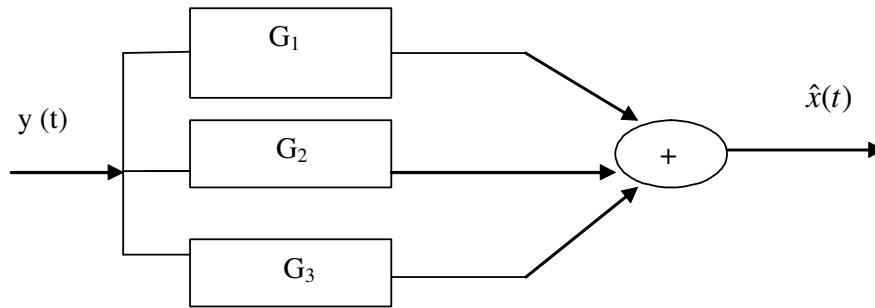


Fig. 5.2 Schema sistemului invers corespunzător unui sistem Volterra de ordin trei

Metoda de determinare a sistemelor  $G_m$  a fost elaborată de către M. Schetzen [5]. Ea permite determinarea expresiilor pentru operatori  $Q_j[.]$  de rang  $j \leq p$  în funcție de operatorii  $H_n$ , pentru  $n \leq j$  și de operatorii  $G_m$ , pentru  $m \leq j$ . Prin egalarea cu zero a operatorilor  $Q_j[.]$  pentru  $j \leq p$ , se obțin expresiile operatorilor din cadrul sistemului invers  $G_j$  în funcție de operatorii  $H_n$ , pentru  $n < j$  precum și de cele ale operatorilor  $G_m$  pentru  $m < j$ .

Presupunând că operatorul Volterra de ordinul întâi modelează un sistem stabil și cauzal avem:

$$G_1 = H_1^{-1} \quad (5.4)$$

$$G_2 = -G_1 H_2 G_1 \quad (5.5)$$

$$G_3 = G_1 [-H_2 G_1 + H_2 [G_1 + G_1 H_2 G_1] - H_2 G_1 H_2 G_1 - H_3 G_1] \quad (5.6)$$

Ținând cont de relația (5.6) se obține pentru  $G_3$  următoarea schemă de implementare.

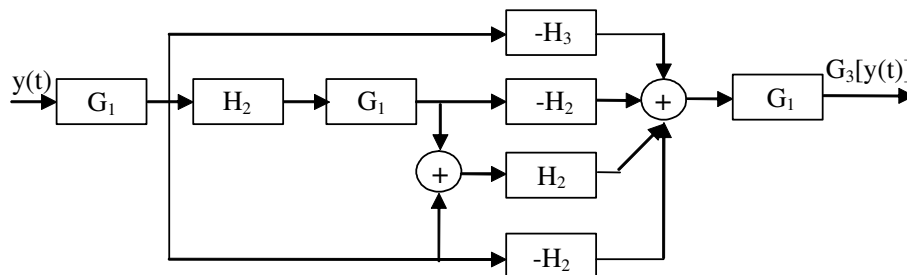


Fig. 5.3 Implementarea sistemului  $G_3$

În cazul în care neliniaritățile ce trebuie compensate sunt de ordin impar, relațiile de mai sus se simplifică și avem:

$$\begin{aligned}
 G_1 &= H_1^{-1} \\
 G_2 &= 0 \\
 G_3 &= -G_1 H_3 G_1
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

Ca urmare, schema de implementare a sistemului post invers  $G_{(3)}$  este mult simplificată așa după cum se indică în fig.5.4.

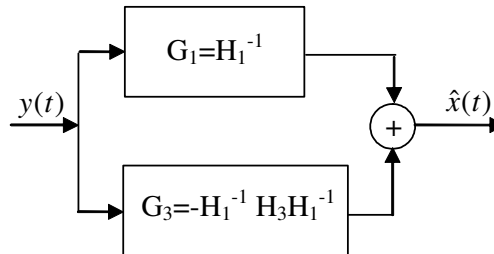


Fig. 5.4 Sistem invers de ordinul al treilea corespunzător unui sistem Volterra ce prezintă numai nuclee impare

Dacă se lucrează în domeniul transformatei Z și notăm cu  $H_1(z)$  transformata Z a nucleului de ordinul întâi, atunci transformata Z,  $G_1(z)$  are expresia.

$$G_1(z) = \frac{1}{H_1(z)} = H_1^{-1}(z)
 \tag{5.8}$$

Dacă  $G_1(z)$  e stabil el poate fi implementat utilizând un filtru IIR sau FIR . Acest lucru este posibil dacă toate zerourile lui  $H_1(z)$  sunt în interiorul cercului unitate

## 5.2 Obținerea sistemului Volterra post-invers prin metoda adaptivă

Metoda anterior prezentată, de determinare a sistemului post-invers presupune cunoașterea sau o bună estimare a nucleelor Volterra.

Sistemul invers poate fi obținut și printr-o metodă adaptivă ilustrată în figura 5.5.

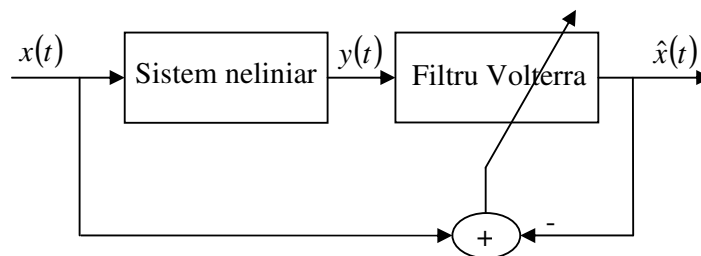


Fig. 5.5 Obținerea sistemului Volterra post-invers prin metoda adaptivă

Metoda adaptivă este mult asemănătoare metodelor adaptive de determinare a nucleelor Volterra și Wiener anterior prezentate. Există însă două diferențe esențiale:

- una este dată de amplasarea filtrului Volterra adaptiv.
- cea de a doua este determinată de modul de calcul al erorii pe baza căreia funcționează algoritmul de adaptare.

Deși această metodă pare mai ușor de aplicat din punct de vedere teoretic întrucât nu necesită o modelare prealabilă a neliniarităților, în practică sunt necesare unele informații privind ordinul acestora pentru a putea stabili ordinul și memoria sistemului Volterra invers.

Problema stabilirii memoriei pentru sistemul Volterra invers este laborioasă și nu face obiectul acestei lucrări.

## 5.4 Aplicație practică

### 5.4.1 Identificarea unui sistem neliniar de ordinul al-II-lea

Se vor determina în cele ce urmează nucleele Volterra de ordinul I și II corespunzătoare unui sistem de ordinul al-II-lea având schema din figura 5.6

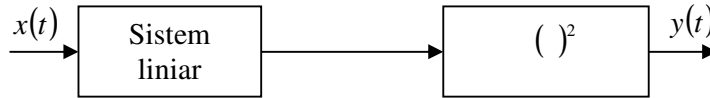


Figura 5.6 Schema sistemului de ordinul al-II-lea supus identificării

Sistemul liniar este caracterizat de răspunsul la impuls  $h(t)$  reprezentat în figura 5.6 și având expresia dată de relația:

$$h(t) = \frac{1256}{0.98} \exp(-251.2t) \sin(1231t) \sigma(t) \quad (5.9)$$

Sistemul astfel ales reprezintă un sistem neliniar fără componentă continuă așa după cum rezultă din relația:

$$\begin{aligned} y(t) &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) x(t-\tau_1) d\tau_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2) x(t-\tau_2) d\tau_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Comparând această relație cu cea obținută modelând sistemul cu un sistem Volterra de ordinul al-II-lea:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (5.11)$$

se obține:

$$h_2(\tau_1, \tau_2) = h(\tau_1) h(\tau_2) \quad (5.12)$$

Modelarea sistemului neliniar s-a făcut în MATLAB. La intrarea sistemului a fost adus un semnal de zgomot alb gaussian de medie nulă.

Cele două serii de timp  $x[n]$  și  $y[n]$  implicate în calculul nucleelor Volterra de diferite ordine s-au obținut prin eșantionarea semnalelor de la intrare respectiv ieșirea sistemului utilizând un pas de eșantionare  $T_e = 500 \mu s$ . Pentru calculul nucleelor s-au folosit serii de timp de câte 6000 de eșantioane. Pentru calculul nucleului de ordinul I s-a folosit formula:

$$k_1[n] = \frac{1}{\sigma^2 N} \sum_{i=0}^N y[i] x[i-n] \quad (5.13)$$

unde  $N=6000$ , iar  $\sigma^2$  reprezintă dispersia zgomotului alb de la intrarea sistemului, egală cu densitatea spectrală de putere.

Calculul nucleului de ordin al-II-lea,  $k_2[n_1, n_2]$ , s-a făcut utilizând formula:

$$k_2[n_1, n_2] = \frac{1}{2(\sigma^2)^2 N} \sum_{i=1}^N y[i]x[i-n_1]x[i-n_2] \quad (5.14)$$

Ambele nuclee au fost calculate în câte 30 de puncte folosind programe scrise în MATLAB.

Relația 5.14 este aplicabilă doar în cazul punctelor  $n_1 \neq n_2$ . Pentru a elimina această restricție s-a înlocuit  $y[n]$  cu  $y[n] - \bar{y}[n]$  în formula lui Lee-Schetzen. Graficul nucleului de ordinul al-II-lea e indicat în figura 5.7

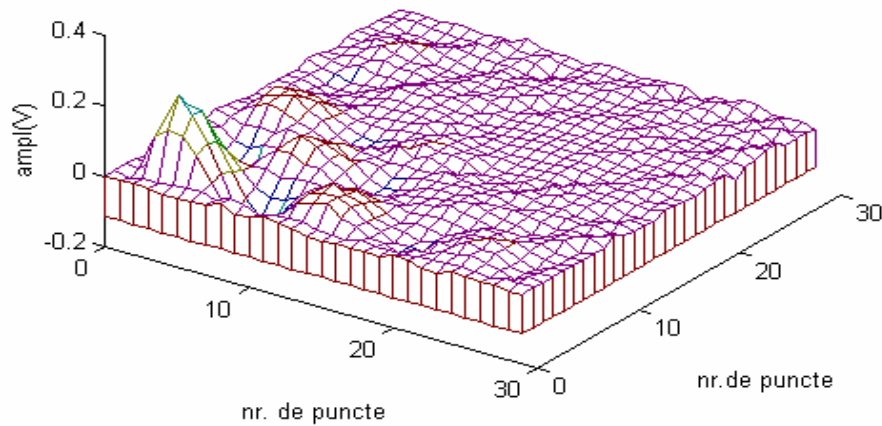


Figura 5.7 Nucleul de ordinul al-II-lea determinat experimental

În figura 5.8 s-a reprezentat nucleul Volterra de ordinul întâi,  $k_1[n]$ , nul din punct de vedere teoretic.

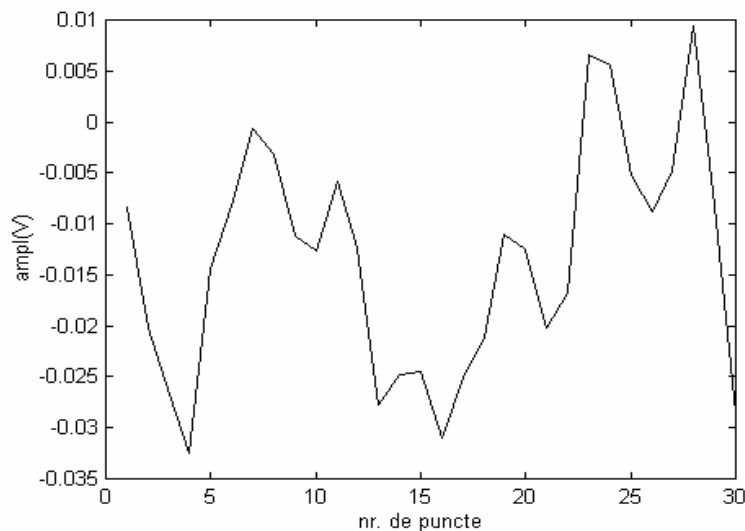


Figura 5.8 Nucleul de ordinul I determinat experimental

Așa după cum se poate observa, valorile determinate experimental în cazul nucleului de ordinul întâi se apropie de cele teoretice.

Nucleul de ordinul al-II-lea determinat în acest mod a fost comparat cu nucleul Volterra de ordinul al-II-lea corespunzător, dedus prin eşantionarea lui  $h_2(t_1, t_2)$ .

$$h_2[n_1, n_2] = T_e^2 h[n_1] h[n_2] \quad (5.15)$$

și care este reprezentată în figura 5.9

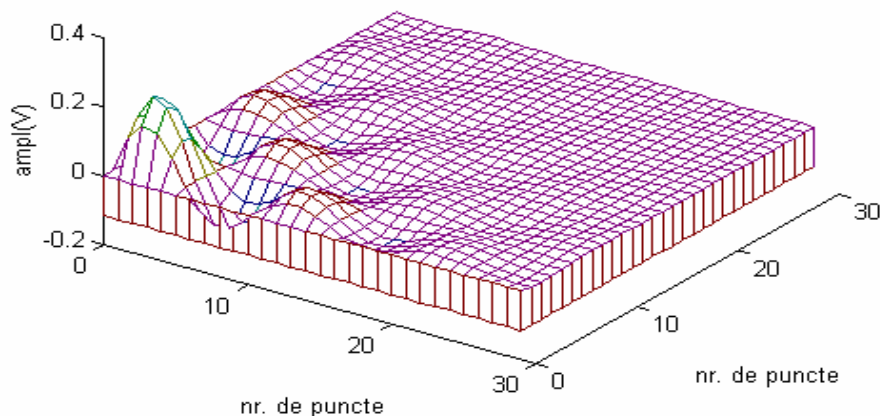


Figura 5.9 Nucleul real de ordinul al-II-lea

Comparând cele două figuri, 5.7 și 5.9, se poate aprecia calitativ acuratețea metodei implementate.

## CAPITOLUL VI

### CONCLUZII

Activitățile de cercetare întreprinse în cadrul fazei curente a grantului cu tema: "Metode și tehnici neliniare în telecomunicații", au fost dedicate studierii metodelor de identificare și compensare a neliniarităților ce se manifestă ca imperfecțiuni în sistem.

S-au avut în vedere două tipuri de astfel de neliniarități: așa-numitele „neliniarități fără memorie” și „neliniarități cu memorie”.

În primul caz au fost studiate două tehnici de modelare:

- modelarea cu ajutorul seriei de puteri;
- modelarea cu ajutorul polinoamelor ortogonale.

În primul caz metoda de compensare studiată are la bază seria de puteri inversă de ordin finit. S-a arătat că neliniaritățile de un anumit ordin pot fi reduse cu ajutorul sistemului de post-distorsionare bazat pe inversa seriei de puteri ce reprezintă sistemul propriu-zis. Compensarea este valabilă însă pe un domeniu limitat a amplitudinii semnalului de intrare. Acest domeniu este funcție de gradul neliniarității precum și de ordinul acesteia.

În cel de-al doilea caz reprezentarea neliniarităților s-a făcut cu ajutorul seriei de polinoame ortogonale specifice diferitelor semnale de intrare. Compensarea s-a făcut și în acest caz prin inversa seriei de polinoame ortogonale. Avantajul major al acestei metode îl constituie capacitatea ei de a înlătura complet neliniaritățile prezente în sistemul pentru care s-a aplicat compensarea. Spre deosebire de seria de puteri, acțiunea seriei inverse polinoamelor ortogonale este independentă de nivelul semnalului de intrare. Principalul dezavantaj pe care-l prezintă seria ortogonală inversă se datorează proprietăților pe care trebuie să le îndeplinească semnalul de intrare corespunzător ei. Cu cât acesta se îndepărtează de modelul teoretic pentru care seria e ortogonală cu atât compensarea devine mai ineficientă.

Pentru modelarea neliniarităților cu memorie s-au folosit modelele Volterra și Wiener. Construirea unui model cât mai exact este deosebit de importantă în problema compensării întrucât baza acestuia se va construi sistemul compensator. Ca și tehnici de estimare a nucleelor Volterra au fost abordate tehnicile adaptive bazate pe algoritmul LMS. S-a prezentat o metodă adaptivă de determinare a nucleelor Volterra, ce se bazează pe algoritmul LMS. Implementarea metodei a fost precedată de un amplu studiu privind filtrarea neliniară adaptivă bazată pe algoritmul LMS. Sunt prezentate concluzii importante referitoare la alegerea pasului de adaptare în cazul filtrului neliniar Volterra.

Compensarea se poate realiza ca și în cazul neliniarităților fără memorie aplicând tehnica post-distorsionării prin introducerea unui sistem invers sistemului model determinat pe cale experimentală. Sistemul post invers poate fi construit pe cale analitică sau prin metode adaptive.

În cadrul aplicației practice prezentate a fost identificat un sistem de ordinul al-II-lea prin determinarea pe cale experimentală a nucleelor de ordin I și II ale sistemului. Cunoșcând structura sistemului supus identificării, nuclee astfel determinate au fost comparate cu cele determinate pe cale analitică. Rezultatele au demonstrat acuratețea metodei folosite, bazată pe algoritmul LMS.

## Bibliografie

- [1] Stenger, A., W., Kellermann, R., Rabenstein, “ Adaptation of Acoustic Echo Cancellers Incorporating a Memoryless Nonlinearity”, IEEE Workshop on Acoustic Echo and Noise Control, Poco Mannor, PA, USA, Sept.1999, [stinger@nt.e-technik.uni-erlangen.de](mailto:stinger@nt.e-technik.uni-erlangen.de)
- [2] Stenger, A., W., Kellermann, “RLS-Adapted Polynomial for Nonlinear Acoustic Echo Cancelling”, Proceedings of the X EUSIPCO 2000, Tampere, Finland, pp.1867-1870.
- [3] Kafka V. S., U., Appel, “Nonlinear Equalization by Recursive Polynomial Systems with a Nonlinear Predictor”, [Veit.Kafka@unibw-muenchen.de](mailto:Veit.Kafka@unibw-muenchen.de)
- [4] Tsimbinos J., “Identification and Compensation of Nonlinear Distorsion”, Thesis, University of South Australia, School of Electronic Engineering, feb. 1995, <http://www.unisa.edu.au/html>.
- [5] Schetzen, M., “The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems, Reprint Edition, Krieger, Malabar, Florida, 1989.
- [6] Koh, T., Powers, E., J., “Second Order Volterra Filtering and its Application to Nonlinear System Identification” IEEE Trans on ASSP, Vol. ASSP-33, No. 6, pag.1445-1455, decembrie 1985.
- [7] Budura Georgeta, „Contribuții privind studiul sistemelor neliniare utilizând seriile Volterra”, Teză de doctorat, UPT, Timișoara, 1999.
- [8] Korenberg, M., J., Hunter, I., W., “The Identification of Nonlinear Biological Systems: Wiener Kernel Approaches”, Annals of Biomedical Engineering, Vol.18, pag. 629-654, Pergamon Press, 1990.
- [9] Cowan, C.F.N., “Application of Adaptive Volterra Filters to Equalization”, Proceedings IEEE, Vol. pp. 67-70, 1993.
- [10] Matthews, V. J., “Adaptive Polynomial Filters”, IEEE Signal Processing Magazine, Vol. 8, No. 3, pag. 10-26, iulie 1991.
- [11] Angot, A., “Complemente de matematici pentru inginerii din electrotehnică și telecomunicații”, Ed. Tehnică, București 1965.
- [12] Cowan, C.F.N., “Application of Adaptive Volterra Filters to Equalization”, Proceedings IEEE, Vol. 1 Pag. 67-70, 1993.
- [13] Frank, W.A., “Low Complexity 3<sup>rd</sup> Order Nonlinear Filtering, [frank@sunny.et.unibw-muenchen.de](mailto:frank@sunny.et.unibw-muenchen.de)
- [14] Dokic, M.V., Clarkson, P.M., “On the Performance on a Second-Order Adaptive Volterra Filter”, IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 41, No 5. pag. 1944-1947, mai 1993.
- [15] Clarkson, P. M., Dokic, M. V., “Stability and Convergence Behaviour of Second-Order LMS Volterra Filter”, Electronics Letters, Vol. 27, No. 5, pag. 441-443, februarie 1991.
- [16] Budura, G., “Tehnici de filtrare adaptivă-Cazul neliniar”, referat de doctorat nr.1, Timișoara 1995.
- [17] Widrow, B., Stearns, S.D., “Adaptive Signal Processing”, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1985.
- [18] Bellanger, M. G., Adaptive Digital Filters and Signal Analysis, Marcel Dekker, Inc, Cap.4, pag.97-129, 1987.

- [19] Horowitz, L.L., K.D. Senne, "Performance Advantage of Complex LMS for Controlling Narrow-Band and Adaptive Arrays", IEEE Trans. On Circuits and Systems, Vol. CAS-28, pp. 562-576, June 1981.
- [20] Tate, C.N., C.C., Goodyear, "Note on Convergence of Linear Predictive Filters, Adapted Using the LMS Algorithm", IEE Proceedings Vol.130, G, No.2 pp 61-64, April 1983.
- [21] Clarkson, P.M., M.V., Dokic, „Stability and Convergence behaviour of Second-order LMS Volterra Filter", Electronic Letters , Vol. 27,No.5, pp.441-443, feb. 1991.
- [22] Dokic, M.V., Clarkson, P.M., „Performance Characteristics of a Third Order Adaptive Volterra Filter", Proc. IEEE Int. Symp. Circuits and Systems, (ISCAS'92), San Diego, U.S.A., Vol. 6 pp.2785-2788, May 1993.