

LA CONSTRUCTION D'UN MODELE NON LINÉAIRE À L'AIDE DE SÉRIES VOLTERRA ET WIENER

GEORGETA BUDURA¹, CORINA BOTOCA¹

Key words: Filtre Volterra, Filtre Wiener, Techniques d'identification, Modèle orthogonalisé.

Dans cet article sont analysés deux types des filtres non linéaires largement utilisés: le filtre Volterra et le filtre Wiener. L'estimation des noyaux Volterra et Wiener à l'aide de la fonction d'intercorrélation entrée-sortie est investiguée afin d'obtenir un modèle fidèle. On propose une méthode de construire un modèle Volterra de second ordre grâce à sa propriété d'orthogonalité quand le signal d'entrée est un processus gaussien. Pour valider la méthode elle est appliquée pour identifier un systèmes non-linéaire d'ordre connu a priori.

1. INTRODUCTION

La représentation des systèmes non linéaires à l'aide de séries Volterra et Wiener nécessite de déterminer les noyaux associés a ces deux développements [1]. La technique utilisée pour estimer les noyaux va déterminer finalement la qualité du modèle. La rapidité de la technique est aussi importante pour la construction des modèles d'ordres supérieurs qui permettront une meilleure approximation du système non linéaire.

Pour le filtre Volterra discret [2] la relation entrée-sortie est décrite par la relation (1):

$$y[n] = h_0 + \sum_{i_1=0}^{\infty} h_1[i_1]x[n-i_1] + \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} h_2[i_1, i_2]x[n-i_1]x[n-i_2] + \dots \\ + \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_p=0}^{\infty} h_p[i_1, i_2, \dots, i_p]x[n-i_1] \dots x[n-i_p] \quad (1)$$

où:

- $y[n]$ est la séquence de sortie observée associée à la séquence d'entrée $x[n]$.

¹) Université "Politehnica" de Timisoara, Bd. V. Parvan nr. 2, Timisoara, CP 300223,
E-mail: georgeta.budura@etc.utt.ro, corina.botoca@etc.utt.ro

$-h_p[i_1, i_2, \dots, i_p]$ représente le noyau Volterra d'ordre p du développement.

Sans perdre de la généralité on peut considérer les noyaux Volterra comme des fonctions symétriques, c'est à dire, $h_p[i_1, i_2, \dots, i_p]$ a la même valeur pour toutes les $p!$ permutations des variables i_1, i_2, \dots, i_p [3].

On appelle le système non linéaire avec mémoire décrit par la relation (1) système d'ordre p . On compare souvent la série Volterra avec la série de Taylor quand la fonction développée consiste en plusieurs variables. Même les limites en ce qui concerne la convergence de ceux deux séries sont semblables: ni une, ni l'autre ne converge pas dans les points de discontinuité de la fonction développée.

Les noyaux sont aussi comparables aux fonctions réponse impulsionnelle d'ordres différents. Le noyau de premier ordre, $h_1[i_1]$, représente la réponse impulsionnelle du filtre non linéaire. Il est attaché à l'opérateur du premier ordre, $H_1[\cdot]$, définie par:

$$H_1[x[n]] = \sum_{i_1=0}^{\infty} h_1[i_1] x[n-i_1] \quad (2)$$

Le noyau de deuxième ordre $h_2[i_1, i_2]$ est attaché à l'opérateur Volterra $H_2[\cdot]$ bilinéaire et invariant en temps, caractérisé par:

$$H_2[x[n]] = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} h_2[i_1, i_2] x[n-i_1] x[n-i_2] \quad (3)$$

L'idée de représenter le système non linéaire par les opérateurs p -linéaires appartient à M. Schetzen:

$$y[n] = \sum_{i=1}^p H_i[x[n]] \quad (4)$$

L'importance du noyau symétrique d'un certain ordre est sa unicité. Parce que la complexité du calcul dépend de l'ordre du système, dans les applications en temps réel on utilise des systèmes Volterra d'ordre inférieur à trois. La relation entrée-sortie pour un tel système devient [4]:

$$\begin{aligned} y[n] = & h_0 + \sum_{i_1=0}^{N-1} h_1[i_1] x[n-i_1] + \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{i_2=0}^{N-1} h_2[i_1, i_2] x[n-i_1] x[n-i_2] + \\ & + \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{i_2=0}^{N-1} \sum_{i_3=0}^{N-1} h_3[i_1, i_2, i_3] x[n-i_1] x[n-i_2] x[n-i_3] \end{aligned} \quad (5)$$

où N représente la fenêtre du filtre. La relation entrée-sortie est linéaire par rapport aux coefficients, $h_2[i_1, i_2]$ et $h_3[i_1, i_2, i_3]$, du filtre. C'est grâce à cette propriété qu'on peut appliquer les techniques du filtrage linéaire ainsi que les techniques du filtrage adaptatif sur un modèle Volterra [5], [6]. Le caractère non linéaire de la relation est reflété par les produits: $x[n-i_1]x[n-i_2]$ et $x[n-i_1]x[n-i_2]x[n-i_3]$, entre les valeurs retardées du signal d'entrée.

2. COMMENT ON PEUT APPLIQUER LA MODELISATION À L'AIDE DU FILTRE VOLTERRA ET DU FILTRE WIENER

Le modèle Volterra est souvent utilisé pour identifier un système non linéaire inconnu. Dans ce cas le but est d'identifier les paramètres du modèle, c'est à dire les coefficients du filtre où les noyaux de différents ordres. Parmi les techniques d'identification des noyaux les plus utilisées sont: celle connue sous le nom de Lee-Schetzen et celle qui utilise le principe du filtrage adaptatif [1], [6].

La première permet d'identifier le noyau attaché à un opérateur d'un certain ordre à l'aide de la fonction d'intercorrélation entrée-sortie. Par exemple, pour déterminer le noyau de deuxième ordre on utilise le schéma:

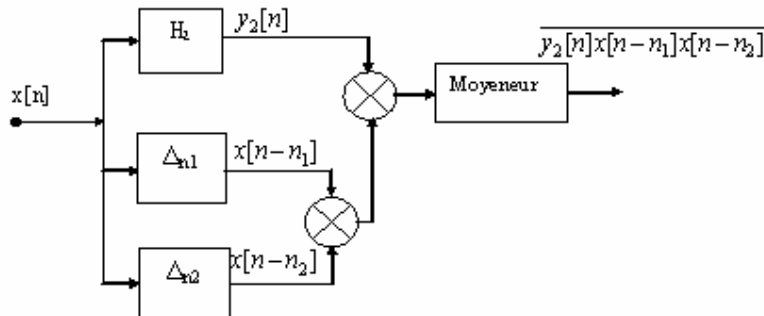


Fig.1 L'identification du noyau Volterra de second ordre

Où: $-x[n]$, la séquence d'entrée, est le bruit blanc gaussien;
 $-y_2[n]$ représente la partie de la réponse associée à l'opérateur de deuxième ordre.

Le signal à la sortie du schéma présenté dans la figure (1) est:

$$\begin{aligned}
\overline{y_2[n]x[n-n_1]x[n-n_2]} &= \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{i_2=0}^{N-1} h_2[i_1, i_2] \overline{x[n-i_1]x[n-i_2]x[n-n_1]x[n-n_2]} \\
&= 2\sigma^2 h_2[n_1, n_2] + \sigma^2 \sum_{i=0}^{N-1} h_2[i, i] \delta[n_1 - n_2]
\end{aligned} \tag{6}$$

Dans la relation (6) σ^2 représente la variance de la séquence d'entrée $x[n]$ qui en ce cas est le bruit blanc gaussien.

Pour $n_1 \neq n_2$:

$$h_2[n_1, n_2] = \frac{1}{2\binom{\sigma^2}{2}} \overline{y_2[n]x[n-n_1]x[n-n_2]} \tag{7}$$

En concordance avec (6) on peut déterminer $h_2[n_1, n_2]$ dans le plan (n_1, n_2) , sauf les points $n_1 = n_2$.

Malheureusement, la technique présentée ne peut pas être appliquée pour déterminer les noyaux d'ordres supérieurs à cause des couplages qui existent entre eux. En ces cas il faut séparer la contribution de chaque opérateur ce qui représente une tâche très difficile dans les applications pratiques.

Une observation importante a été faite: la sortie du filtre Volterra de deuxième ordre (FV_2) représente une forme orthogonalisée quand le signal d'entrée est le bruit blanc gaussien [7]. Ainsi, pour déterminer le noyau de deuxième ordre du système il ne faut pas séparer la contribution de l'opérateur $H_2[\cdot]$ comme indique le schéma dans la figure (1). Au lieu de $H_2[\cdot]$ on utilise le système entier. Cette propriété sera utilisée dans le chapitre 3 pour identifier le système non linéaire de second ordre.

Une autre solution pour identifier le système non linéaire est d'utiliser le développement en série des fonctionnelles orthogonales proposée par Wiener. Pour construire son modèle, Wiener a introduit l'utilisation des polynômes orthogonaux dans l'analyse fonctionnelle et l'a appliquée ensuite à la série de Volterra. Le résultat a été la série de Wiener dont les termes sont orthogonaux quand le signal d'entrée est le bruit blanc gaussien. C'est pourquoi on les appelle les fonctionnelles- G . L'orthogonalité des fonctionnelles- G permet de calculer indépendamment chaque noyau. En même temps, la série Wiener représente la meilleure approximation d'un certain ordre pour le système non linéaire.

La construction des fonctionnelles- G est fondée sur la procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt appliquée aux fonctionnelles Volterra. Le résultat est le modèle Wiener d'un certain ordre p décrit par la relation (8):

$$y[n] = G_0[k_0; x[n]] + G_1[k_1; x[n]] + \dots + G_p[k_p; x[n]] \quad (8)$$

où k_i représente le noyau associé à la fonctionnelle d'ordre i . Les fonctionnelles jouent de la propriété d'orthogonalité:

$$\overline{G_n[k_n; x[n]]G_m[k_m; x_m]} = 0 \quad \text{pour } n \neq m \quad (9)$$

est de celle de non-homogénéité. La dernière propriété est reflétée par les expressions des fonctionnelles de différents ordres:

$$G_0[k_0; x[n]] = k_0 \quad (10)$$

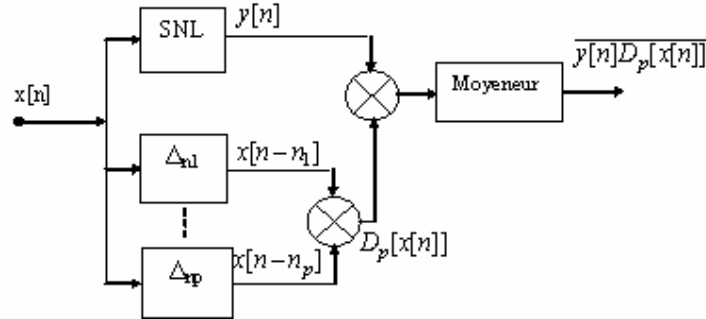
$$G_1[k_1; x[n]] = \sum_{m_1=0}^{N-1} k_1[m_1]x[n-m_1] \quad (11)$$

$$G_2[k_2; x[n]] = \sum_{m_1=0}^{N-1} \sum_{m_2=0}^{N-1} k_2[m_1, m_2]x[n-m_1]x[n-m_2] - \sigma^2 \sum_{m_1=0}^{N-1} k_2[m_1, m_1] \quad (12)$$

$$\begin{aligned} G_3[k_3; x[n]] = & \sum_{m_1=0}^{N-1} \sum_{m_2=0}^{N-1} \sum_{m_3=0}^{N-1} k_3[m_1, m_2, m_3]x[n-m_1]x[n-m_2]x[n-m_3] - \\ & 3\sigma^2 \sum_{m_1=0}^{N-1} k_3[m_1, m_1, m_1]x[n-m_1] - \\ & \sigma^2 \sum_{m_1=0}^{N-1} \sum_{m_2=0}^{N-1} k_3[m_1, m_2, m_2]x[n-m_1]x[n-m_2] \end{aligned} \quad (13)$$

On peut comparer le modèle de Wiener avec son correspondant pour les systèmes sans mémoire, c'est à dire la représentation à l'aide des polynômes Hermite. Si dans les relations (11-13) on remplace les noyaux avec des correspondants sans mémoire, les fonctionnelle de Wiener deviennent les polynômes de Hermite.

L'avantage principal déterminé par la propriété d'orthogonalité est la possibilité de mesurer directement les noyaux. Le schéma utilisé en ce cas est présenté dans la figure (2). La construction du réponse du filtre à l'aide des fonctionnelles Wiener est assez difficile. C'est pourquoi elle est rarement utilisée dans les applications pratiques. La structure des fonctionnelles Wiener indiquée par les relations (10-13), montre aussi la difficulté d'utiliser les techniques du filtrage adaptatif pour identifier les noyaux Wiener de certains ordres.

Fig.2 l'Identification du noyau Wiener d'un certain ordre p

Dans la figure (2) le terme SNL représente le système non linéaire à identifier. Le nombre des étages retardateurs est en concordance avec l'ordre du noyau à identifier.

Si on a choisi de modéliser le système à l'aide d'un modèle Wiener de troisième ordre, alors la sortie $y[n]$ devient :

$$y[n] = \sum_{i=0}^3 G_i[k_i; x[n]] \quad (14)$$

Le noyau d'ordre nul est donné par:

$$k_0 = \overline{y[n]} \quad (15)$$

Pour déterminer le noyau de premier ordre il faut utiliser une seule cellule retardatrice dans le schéma présenté dans la figure (2). Le signal à la sortie devient en ce cas :

$$\overline{y[n]x[n-n_1]} = \sum_{i=1}^3 \overline{G_i[k_i; x[n]]x[n-n_1]} = \sigma^2 k_1[n_1] \quad (16)$$

En utilisant en pratique la méthode présentée, on peut déterminer le noyau dans un nombre fini des points.

Pour déterminer le noyau d'ordre second il faut utiliser deux cellules retardatrices dans la figure (2), c'est à dire $p=2$ et $D_2[x[n]] = x[n-n_1]x[n-n_2]$, ce qui mène alors au résultat :

$$\overline{y[n]D_2[x[n]]} = \sum_{i=1}^3 \overline{G_i[k_i; x[n]]D_2[x[n]]} = 2!(\sigma^2)^2 k_2[n_1, n_2] + k_0 \sigma^2 \delta[n_1 - n_2] \quad (17)$$

La relation pour déterminer le noyau de second ordre devient :

$$k_2[n_1, n_2] = \frac{1}{2!(\sigma^2)^2} \overline{y[n]D_2[x[n]]} \quad \text{pour } n_1 \neq n_2 \quad (18)$$

La restriction imposée par la condition $n_1 \neq n_2$ peut être éliminée si on modifie la relation (17) en concordance avec :

$$\overline{[y[n] - G_0[k_0; x[n]]]D_2[x[n]]} = 2!(\sigma^2)^2 k_2[n_1, n_2] \quad (19)$$

Ensuite nous avons :

$$k_2[n_1, n_2] = \frac{1}{2!(\sigma^2)^2} \overline{[y[n] - G_0[k_0; x[n]]]D_2[x[n]]} \quad (20)$$

Enfin, pour le noyau de troisième ordre le nombre de cellules retardatrices dans le schéma présentée dans la figure (2) devient égal a trois. Le signal à la sortie est :

$$\overline{y[n]D_3[x[n]]} = 3!(\sigma^2)^3 k_3[n_1, n_2, n_3] \quad (21)$$

et le noyau k_3 a les valeurs données par:

$$k_3[n_1, n_2, n_3] = \frac{1}{3!(\sigma^2)^3} \overline{y[n]D_3[x[n]]} \quad \text{pour } n_1 \neq n_2 \neq n_3 \quad (22)$$

Pour enlever la restriction imposée il faut utiliser encore une fois le signal d'entrée modifié :

$$k_3[n_1, n_2, n_3] = \frac{1}{3!(\sigma^2)^3} \overline{[y[n] - G_1[k_1; x[n]]]D_3[x[n]]} \quad \forall n_1, n_2, n_3 \quad (23)$$

Les noyaux Wiener sont, en général, différentes aux noyaux Volterra de même ordre. Par exemple le noyau h_0 est tout simple la sortie du système quand l'entrée est nulle, pendant que le noyau Wiener d'ordre nulle représente la moyenne de la sortie quand l'entrée est une gaussienne a moyenne nulle. Pourtant les noyaux

correspondants de premier ordre et de deuxième ordre sont les mêmes si l'ordre du système est inférieur à trois.

3. SIMULATIONS ET RESULTATS

Pour faire l'évidence des propriétés au-dessus mentionnées nous avons expérimenté l'identification d'un system de deuxième ordre ayant la structure indiquée dans la figure (3).

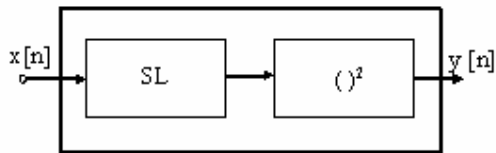


Fig.3 La structure du système non linéaire

La réponse impulsionnelle du filtre linéaire discret, (SL), a été obtenu en concordance avec la relation (24), où la fonction $h_1(t)$ est représentée dans la figure (4) et T_e représente la période d'échantillonnage.

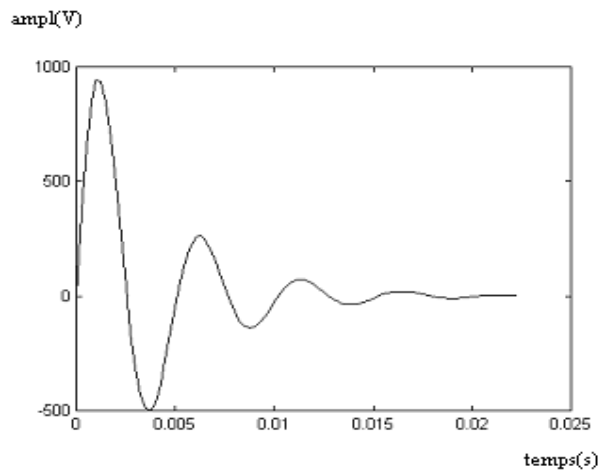


Fig.4 La réponse impulsionnelle du filtre linéaire

$$h_1[n] = \frac{1}{T_e} h_1(nT_e) \quad (24)$$

On peut exprimer le signal à la sortie du filtre non linéaire avec mémoire à l'aide de la relation (25).

$$y[n] = \left(\sum_{r=0}^{M-1} h[r]x[n-r] \right)^2 = \sum_{i_1=0}^{M-1} \sum_{i_2=0}^{M-1} h[i_1]h[i_2]x[n-i_1]x[n-i_2] \quad (25)$$

Si on fait la comparaison avec la relation (3), on peut affirmer que le système non linéaire représenté dans la figure (3), est un système Volterra de second ordre ayant les noyaux:

$$h_0 = 0, \quad h_1 = 0, \quad h_2[n_1, n_2] = h[n_1]h[n_2] \quad (26)$$

Cette observation nous permet ensuite de faire une comparaison entre les noyaux mesurés en concordance avec la technique présentée et le vrais noyaux donnée par la relation (26). Grâce à la propriété mentionnée le système Volterra de second ordre est un modèle orthogonalisée quand le signal d'entrée est un processus gaussien. Grâce a cette propriété nous avons mesuré le noyau Volterra de second ordre à l'aide du schémas présenté dans la figure (2), en remplaçant le système non linéaire par celui de la figure (4).

La modélisation a été faite en utilisant le logiciel MATLAB. Les deux séquence $x[n]$ et $y[n]$ ont chacun $M = 6000$ échantillons. Pour le calcul du noyau de premier ordre nous avons utilisé la formule donnée par (27).

$$h_1[n] = \frac{1}{\sigma^2(M-N+1)} \sum_{i=N}^M y[i]x[i-n] \quad (27)$$

Où $n = \overline{1, N}$, N , représentant la fenêtre du filtre.

Pour le calcul du noyau de second ordre la formule utilisée est donnée par la relation (28) et la relation (29) Les variables n_1 et n_2 ont les valeurs suivantes: $n_1 = \overline{1, N}$, $n_2 = \overline{1, N}$.

$$h_2[n_1, n_2] = \frac{1}{2(\sigma^2)^2(M-N+1)} \sum_{i=N}^M y[i]x[i-n_1]x[i-n_2], \quad n_1 \neq n_2 \quad (28)$$

$$h_2[n_1, n_2] = \frac{1}{2(\sigma^2)^2(M-N+1)} \sum_{i=N}^M (y[i] - \overline{y[n]})x[i-n_1]x[i-n_2], \quad (29)$$

La figure (5) montre le résultat en ce qui concerne le noyau de premier ordre, obtenu en utilisant le schémas présenté dans la figure (2), équipé en ce cas avec un

seul étage retardateur. On peut remarqué que le noyau est nul et en concordance avec le résultat théorique donné par la relation (26).

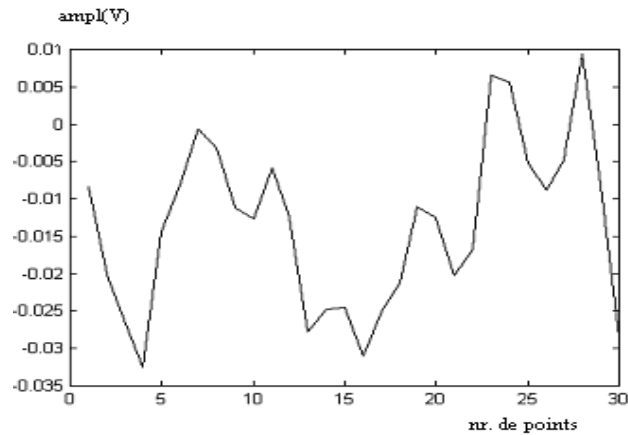


Fig.5 Le noyau de premier ordre mesuré en concordance avec la relation (27)

Le noyau Volterra de second ordre mesuré à l'aide du schémas présenté dans la figure (2), équipé en ce cas avec deux étages retardateurs, est représenté dans la figure (6).

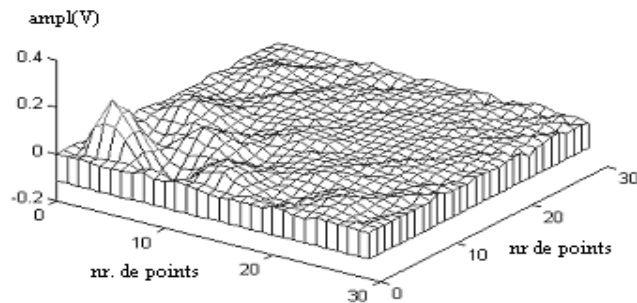


Fig.6 Le noyau de second ordre mesuré en concordance avec les relations (28) et (29)

En même temps, nous avons calculé le vrais noyau de second ordre en concordance avec la relation (26) et ensuite nous avons représenté le résultat dans la figure (7).

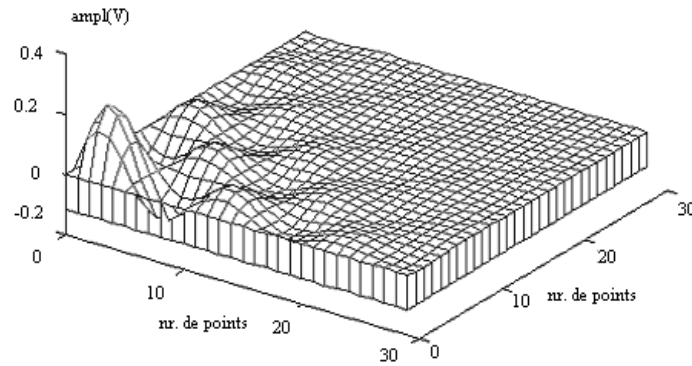


Fig.7 Le noyau de second ordre déterminé en concordance avec la relation (26)

On peut remarquer que les deux noyau sont très semblable ce qui montre que la technique utilisée est bonne.

4. CONCLUSIONS

Grâce a une bonne expérience dans le domaine du filtrage non-linéaire, nous avons investigué les propriétés des filtres Volterra et Wiener afin de construire un modèle utile pour les applications pratiques. Nous avons donné aussi les relations entrée- sortie pour les deux type de filtres que nous avons investiguée. Nous avons introduit une méthode qui permet l'identification d'un système Volterra de second ordre basée sur la propriété d'orthogonalité de celui-ci quand le signal d'entrée est le bruit blanc gaussien. Les futures recherches seront dédié aux méthodes de construire des filtres Volterra et Wiener de troisième ordre.

Reçu le

Université "Politehnica" de Timișoara

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Schetzen, *The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems*, John Wiley and Sons, Inc. New York, 1980.

2. T. Koh, E.J. Powers, *Second order Volterra filtering and its application to nonlinear system identification*, IEEE Trans on ASSP, Vol. ASSP-33, No. 6, pp.1445-1455, dec.1985.
3. W. J. Rugh, *Nonlinear system theory. The Volterra –Wiener approach*, J. Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1981.
4. Georgeta Budura, *Contributii privind studiul sistemelor neliniare utilizând seriile Volterra*, Teză de doctorat, UPT, Timișoara, 1999.
5. V. J. Matews, *Adaptive polynomial filters*, IEEE, Signal Processing Magazine, pp. 10-25, July, 1991.
6. J. Tsimbinos, *Identification and compensation of nonlinear distortion*, Thesis, Institut for Telecommunications Research, University of South Australia, <http://www.unisa.edu.au/html>, 1995.
7. M. J. Korenberg, I.W. Hunter, *The identification of nonlinear biological systems: Wiener kernel approaches*, Annals of Biomedical Engineering, Vol. 18, pp. 629-654, 1990.

THE CONSTRUCTION OF A NONLINEAR MODEL USING THE VOLTERRA AND THE WIENER SERIES

GEORGETA BUDURA, CORINA BOTOCA

In this paper we analyze two widely used nonlinear filters: the Volterra filter and the Wiener filter. In order to create an accurate model, the estimation of the Volterra and the Wiener kernels is studied using the input-output intercorrelation function of the nonlinear filter. We introduce a method of construction of a second order Volterra filter based on its orthogonality property when the input signal is a white Gaussian process. The proposed method is verified in an identification application of a second order nonlinear filter.