Simularea canalelor de transmisie (radio) cu fading plat de tip Rayleigh şi Rice

Horia ***Balta****, Alin* ***Miloş****, Mihai* ***Răşinar***

Introducere

Fenomenul de fading apare cu pregnanță în canalele de transmisiune radio şi se datorează în special transmisiilor pe căi multiple ale semnalului util. Dacă răspunsul în timp al canalului cu fading are o durată mult inferioară duratei simbolului atunci fadingul este neselectiv în frecvență. Tipul de fading diferă funcție de aplicație: banda de frecvență utilizată, distanța şi geometria spațiului dintre antena emițătoare şi cea receptoare, viteza de modificare a acestei geometrii, condiții atmosferice, etc. Deşi modelarea canalului radio este în curs de investigare, un model suficient, acceptabil, pentru multe dintre canalele reale este de a considera relația intrare-ieşire a canalului digital de forma:

$$y_k = \alpha_k * x_k + w_k\,, \tag{1}$$

unde x_k şi y_k sunt valorile emisă şi recepționată ale semnalului de date, w_k este o valoare aleatoare responsabilă de caracterul fluctuant în timp (fadingul). Tipul variabilei aleatoare α_k dă şi tipul canalului (Rayleigh sau Rice).

Aşadar, pentru simularea canalului este necesar să se genereze secvențele α_k , x_k şi w_k , respectând natura fiecăreia. În (fig.1) este ilustrat modelul canalului considerat precum şi modul de calcul al BER. Secvența de intrare x_k este binară, aleatoare, în format NRZ bipolar. Pentru generarea secvenței x_k se generează o secvență, u_k, de numere aleatoare cu distribuție uniformă în intervalul $[0,1)$ după metoda prezentată în paragraful următor. Secvența dorită se obține prin transformarea:

$$x_k=2*[2*u_k]-1 \tag{2}$$

unde [ ] semnifică operația de trunchiere la partea întreagă. Deoarece u_k are distribuție uniformă în $[0,1)$, $[2*u_k]$ poate lua valorile 0 sau 1 cu probabilitate ½ iar x_k va lua corespunzător valorile -1 sau $+1$.

Secvența α_k va avea o distribuție Rayleigh sau Rice iar w_k este o secvență cu distribuție Gauss ce simulează zgomotul AWGN (aditiv, alb şi gaussian).

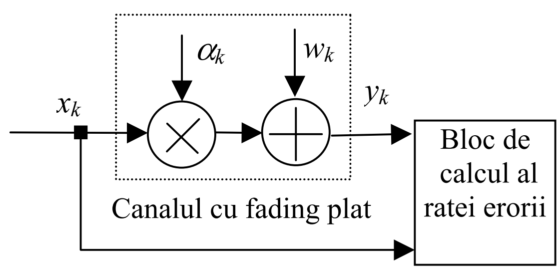


Fig. 1 *Model pentru simularea şi studiul performanțelor BER ale canalului cu fading plat*

Generarea secvențelor aleatoare cu distribuție uniformă

Generarea numerelor cu distribuție uniformă se face prin metode recurențiale, uşor de realizat prin calcul computațional. În acest paragraf este prezentată *metoda* numită a *reziduurilor*, dar în [1] se pot găsi şi alte metode. Metoda reziduurilor utilizează formula:

$$X_k = [a \cdot X_{k-1} + c] \text{ modulo } M. \quad (3)$$

Toți termenii ecuației (3) sunt întregi pozitivi, M este un număr (eventual prim) de valoare mare pentru a asigura o perioadă de repetiție mare, a este factorul de multiplicare ($a<M$), iar c este un increment, uzual 0 sau 1. Metoda generează numere întregi, uniform distribuite în intervalul $[0, M]$. Pentru a obține numere cu distribuție uniformă în intervalul $[0,1]$, X_k trebuie împărțit la M. Cele mai utilizate recurențe sunt (pentru un procesor de 32 biți):

$$X_k = 16807 \cdot X_{k-1} \text{ modulo } (2^{31}-1);$$
$$X_k = [69069 \cdot X_{k-1} + 1] \text{ modulo } 2^{32}. \quad (4)$$

Prima variantă oferă o perioadă de repetiție de $(2^{31}-2)$, iar a doua 2^{32}.

Generarea numerelor aleatoare cu distribuție particulară cunoscută

În acest paragraf este descrisă o metodă de generare a unei secvențe de numere aleatoare, X_k, cu o distribuție particulară cunoscută, în ipoteza cunoaşterii sub formă analitică a funcției, $F(x)$, de repartiție a probabilității variabilei aleatoare X. Deoarece codomeniul funcției $F(x)$ este intervalul $[0, 1]$ şi deoarece F este monotonă pe toată axa reală, putem construi variabila aleatoare X pornind de la o variabilă aleatoare U, având distribuția constantă pe intervalul $[0, 1]$, utilizând transformarea:

$$X = F^{-1}(U). \quad (5)$$

Astfel, generând o secvență de numere U_k cu distribuție constantă pe $[0, 1]$ (după metoda prezentată în paragraful precedent) şi aplicând transformarea dată prin relația (5), obținem secvența de numere având distribuția $dF(x)/dx$.

Generarea numerelor aleatoare cu distribuții uzuale (Rayleigh, Gauss şi Rice)

Distribuția Rayleigh. Densitatea de probabilitate şi funcția de repartiție a probabilității unei variabile aleatoare Rayleigh, sunt:

$$p_{Ry}(r) = \frac{r}{\sigma^2} \cdot exp\left(-\frac{r^2}{2 \cdot \sigma^2}\right), \quad pentru \quad r \geq 0 \quad (6)$$

$$F_{Ry}(r) = 1 - exp\left(-\frac{r^2}{2 \cdot \sigma^2}\right), \quad pentru \quad r \geq 0 \quad (7)$$

Deoarece F_{Ry} este monoton crescătoare, este şi inversabilă, iar inversa ei, F_{Ry}^{-1} este :

$$F_{Ry}^{-1}(u) = \sqrt{-2 \cdot \sigma^2 \cdot ln(1-u)}, \quad 0 \leq u < 1. \quad (8)$$

Dacă U este o variabilă aleatoare cu distribuție constantă pe $[0,1)$, atunci prin transformarea:

$$R = F_{Ry}^{-1}(U) = \sqrt{-2 \cdot \sigma^2 \cdot ln(1-U)} \qquad (9)$$

se poate obține o variabilă aleatoare distribuită Rayleigh.
Distribuția normală (gaussiană). Densitatea de probabilitate normală şi funcția de repartiție a probabilității corespunzătoare, sunt:

$$p_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right), \qquad (10)$$

$$F_G(x) = \int_{-\infty}^{x} p_G(v) \cdot dv = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot erf\left(\frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}\right), \qquad (11)$$

unde m reprezintă media, σ^2 dispersia, iar $erf(x)$ reprezintă funcția eroare (error function) având expresia:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x exp\left(-t^2\right) \cdot dt\,. \qquad (12)$$

Din cauză că $F_G(x)$ nu are o formă analitică explicită, pentru generarea unei secvențe de numere, X, distribuite normal, nu se poate aplica direct metoda de generare descrisă în paragraful precedent. Aceasta se poate face, însă, pornind de la faptul cunoscut că dacă X_1 şi X_2 sunt două variabile aleatoare normale, cu medie nulă şi aceeaşi dispersie σ^2, atunci variabila aleatoare R, definită prin:

$$R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}\,, \qquad (13)$$

are o distribuție de tip Rayleigh. Variabilele X_1 şi X_2 pot fi, atunci, exprimate astfel

$$X_1 = R \cdot cos(2\pi \cdot U_1) \qquad X_2 = R \cdot sin(2\pi \cdot U_1), \qquad (14)$$

unde U_1 este o variabilă aleatoare cu distribuție uniformă pe [$0, 1$]. Rezultă că o secvență de numere distribuită normal poate fi generată pornind de la două variabile cu distribuție uniformă pe [$0, 1$], prin transformarea:

$$X = \sqrt{-2 \cdot \sigma^2 \cdot ln(U_2)} \cdot cos(\pi \cdot U_1). \qquad (15)$$

Distribuția Rice. Densitatea de probabilitate riceană are forma:

$$p_{Rc}(x) = \frac{r}{\sigma^2} \cdot exp\left(-\frac{r^2 + A^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) \cdot I_o\left(\frac{A \cdot r}{\sigma^2}\right), \quad pentru \quad r \geq 0\,, \qquad (16)$$

în care:

$$I_o(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} e^{x \cdot \cos\psi} d\psi\,. \qquad (17)$$

este funcția Bessel modificată, de spețа I-a şi ordin zero.

O variabilă aleatoare, R_c, cu distribuție Rice, se obține compunând două variabile aleatoare normale X_1 şi X_2, având ambele aceeaşi dispersie σ^2, însă doar una cu medie nulă:

$$R_c = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}\ , \tag{18}$$

Variabila X_1 poate fi gândită ca:

$$X_1 = X_3 + A, \tag{19}$$

unde X_3 este o variabilă normală cu medie nulă şi dispersie σ^2. Atunci rezultă că:

$$R_c = \sqrt{(X_3 + A)^2 + X_2^2} = \sqrt{R^2 + 2 \cdot A \cdot R \cdot cos\,\Phi + A^2} \tag{20}$$

unde:

$$R = \sqrt{X_2^2 + X_3^2}\ , \tag{21}$$

este o variabilă aleatoare cu distribuție Rayleigh. Utilizând în continuare modul de generare al variabilei aleatoare distribuită Rayleigh, dat prin (15), se obține:

$$R_c = \sqrt{-2 \cdot \sigma^2 \cdot ln(U_1) + 2 \cdot A \cdot \sqrt{-2 \cdot \sigma^2 \cdot ln(U_1)} \cdot cos(\pi \cdot U_2) + A^2} \tag{22}$$

Spre deosebire de generarea variabilei aleatoare cu distribuție Rayleigh, relația (15), relația (22) prin care se poate genera o variabilă aleatoare cu distribuție Rice, implică două variabile cu distribuție uniformă.

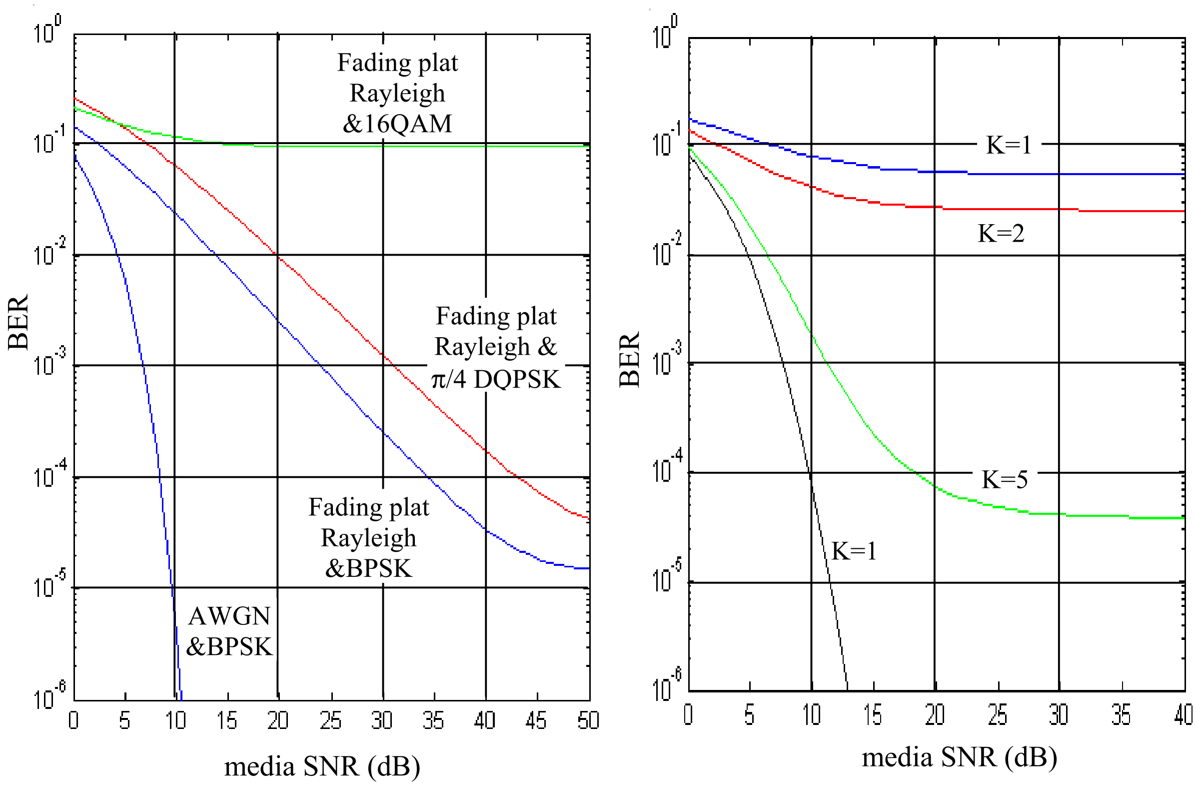
Performanțele sistemelor de transmisie cu fading plat de tip Rayleigh sau Rice

În diagramele din (fig.2) sunt prezentate curbele BER obținute prin simularea canalelor AWGN şi cu fading plat de tip Rayleigh, în conjuncție cu diferite tipuri de modulații, BPSK, DQPSK deplasat cu π/4 şi 16QAM.

Evident, cele mai bune rezultate sunt date de canalul fără fading (AWGN) pentru care dependența BER(SNR) este exponențial descrescătoare.

Canalele cu fading de tip Rayleigh sunt mult mai slabe în performanța BER. Se observă o dependență liniar descrescătoare a ratei erorii funcție de raportul semnal per zgomot, BER(SNR), pentru modulațiile BPSK şi DQPSK deplasat cu π/4, cu o limitare a BER-ului la valori peste 10^{-5}. Modulația 16QAM este impracticabilă în canalele cu fading plat de tip Rayleigh.

Canalul cu fading Ricean se comportă asemenea celui AWGN pentru K>5. Aceasta deoarece predomină caracterul nefluctuant. Pentru valori subunitare ale lui K canalul Ricean este asemănător canalului Rayleigh. Trecerea de la tipul Rayleigh spre cel AWGN, însă, nu se face liniar. Acest fapt este indicat atât de curbele BER (SNR) din (fig.2b) pentru K = 1 şi K = 2 cât şi de diagramele din (fig.3).



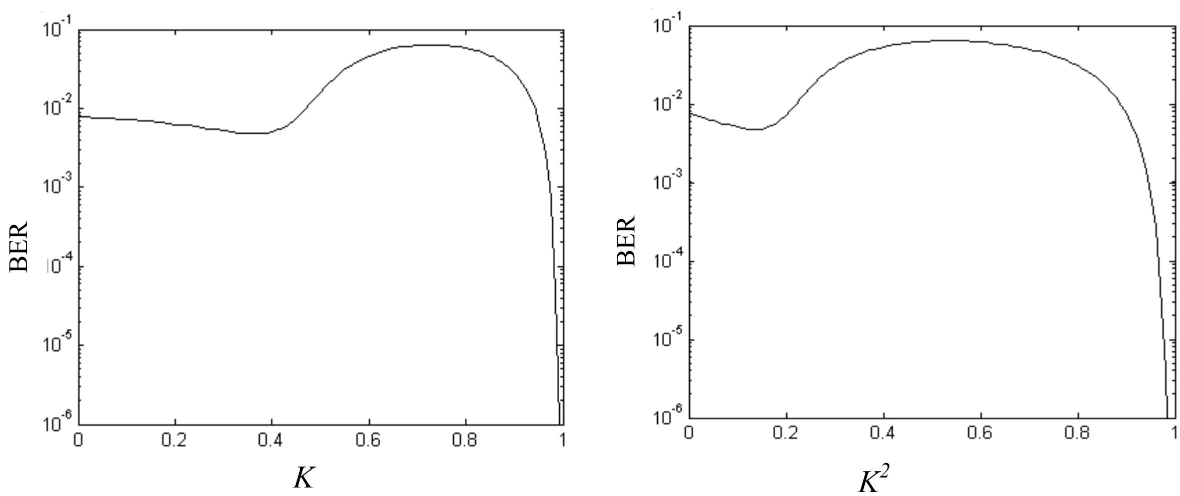
a) ***b)***

Fig. 2. *Performanțele BER obținute prin simularea sistemelor de transmisie: a) canal AWGN şi cu fading plat de tip Rayleigh cu diferite tipuri de modulații; b) canal cu fading plat de tip Rice, K=1, 2, 5, 10 (K^2= puterea componentei nefluctuante / puterea totală)*

Diagramele din (fig.3) indică situația cea mai puțin favorabilă atunci când cele două componente (fluctuantă – Rayleigh şi nefluctuantă – AWGN) sunt de puteri aproximativ egale. Performanțele canalului Ricean sunt mult mai slabe chiar şi decât ale canalului Rayleigh (atunci când canalul ar fi pur fluctuant).

Concluzii:

În această lucrare sunt prezentate metode de simulare a canalelor cu fading plat de tip Rayleigh şi Rice precum şi performanțele BER ale acestor canale obținute prin simulări. Canalul cu fading plat de tip Rayleigh prezintă o dependență liniară a BER-ului funcție de SNR cu o limitare la BER = 10^{-5} în timp ce comportarea canalului Rice este puternic dependentă de balansul puterii între componentele fluctuantă şi nefluctuantă.



a) **b)**

Fig. 3. *Dependența ratei erorii de bit (BER) de balansul puterii între componentele fluctuantă şi nefluctuantă a semnalului recepționat din canalul Ricean (K^2 = puterea componentei nefluctuante / puterea totală) la SNR = 15 dB.*

Bibliografie

1. M. C. **Jeruchim**, P. **Balaban**, K.S. **Shanmugan**, „*Simulation of Communication Systems, Modeling, Methodology and Techniques*”, second edition, Kluwer Academic, 2000
2. John G. **Proakis**, “*Digital communications*”, McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering Stephen W., 2001.